This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

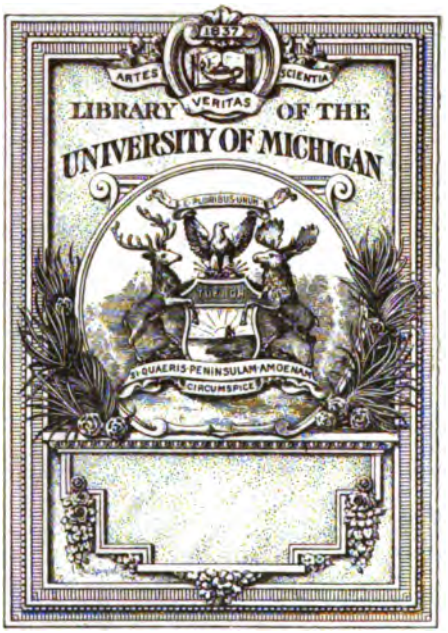
Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Astron. Obs.
QB
378
.F4
B39

STORAGE
C2

B 504779

Digitized by Google



Digitized by Google

Astronomical
Observatory
QB
378
.F4
B39

Digitized by Google

Digitized by Google

UNTERSUCHUNGEN

ÜBER

DIE ALLGEMEINEN STÖRUNGEN DER FERONIA.

INAUGURAL - DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOCTORWÜRDE

BEI DER

PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT

DER RHEINISCHEN FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT ZU BONN

VORGELEGT UND MIT DEN BEIGEFÜGTEN THESEN VERTHEIDIGT

AM 29. MÄRZ 1882, VORMITTAGS 11 UHR

VON

LUDWIG BECKER

AUS WESEL.

BONN,

UNIVERSITÄTS-BUCHDRUCKEREI VON CARL GEORGI.

1882.

Digitized by Google

Digitized by Google

SEINEM HOCHVEREHRTEN LEHRER

HERRN PROFESSOR DR. SCHÖNFELD

IN DANKBARER ERGEBENHEIT

DER VERFASSER.

Digitized by Google

Digitized by Google

Abschnitt I.

Entwickelung der Grundformeln.

§ 1.

Eine allgemeine Lösung des Problems der drei Körper ist bekanntlich noch nicht gelungen. Durch die Annahme, dass einer der Körper mit sehr viel grösserer Intensität auf die Bewegung der anderen wirkt, ist es jedoch möglich, das Problem durch Näherungen zu lösen. In diesem Falle werden sich die anderen Körper um den Centralkörper nahezu nach den Kepler'schen Gesetzen bewegen, und es wird daher die Aufgabe sein, die Störungen dieser elliptischen Bewegung zu ermitteln.

Bezeichnet man die Masse des gestörten Körpers mit m, die des störenden mit m', und unterscheidet man die Coordinaten des störenden Körpers durch Accente, so sind die Differentialgleichungen der Bewegung des gestörten Körpers

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k^2(1+m)\frac{x}{r^3}=k^2(1+m)\frac{d\Omega}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}+k^2(1+m)\frac{y}{r^3}=k^2(1+m)\frac{d\Omega}{dy}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2}+k^2(1+m)\frac{z}{r^3}=k^2(1+m)\frac{d\Omega}{dz}$$

$$\text{wenn } \Omega=\frac{m'}{1+m}\left(\frac{1}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}}-\frac{xx'+yy'+zz'}{r'^3}\right) \text{ ist.}$$

Ist $\Omega=0$, so tritt der Fall der elliptischen Bewegung ein, und die Coordinaten werden Function der 6 Constanten oder der elliptischen Elemente sein. Den Gleichungen für die gestörte Bewegung wird auf zweierlei Weise genügt; 1. man kann die Elemente als Function der Zeit auffassen und sie so bestimmen, dass sie den Ort und die Geschwindigkeit zu jeder Zeit geben, oder 2. man geht von constanten Elementen aus und bestimmt direkt die Correctionen der Coordinaten. Für die Bestimmung der Störungen kommt zunächst die Berechnung der Störungsfunction Ω in Betracht. In früherer Zeit entwickelte man diese nach Potenzen der Excentricität und Neigung und drückte die Coefficienten als Function der Zeit durch vollständig entwickelte analytische Grössen aus. Die Coefficienten waren indessen so beschaffen, dass Glieder höherer Ordnung nicht selten grösser wurden als die der niedrigeren Ordnung.

Um die Nachtheile dieser Entwickelung zu umgehen, schlug Hansen einen anderen Weg ein. Sein Verfahren besteht im Wesentlichen darin, dass man die numerische Rechnung auf wenige

Digitized by Google

Grundformeln gründet, und dass man eine Anzahl von unendlichen Reihen, die nach den Sinussen und Cosinussen der Vielfachen gewisser Winkel fortschreiten, mit einander multiplicirt. Als Function der Zeit führte er nicht wie früher die mittlere Länge, sondern die excentrische Anomalie ein, wodurch die Convergenz der Reihen sehr vergrössert wird. Eine weitere Eigenthümlichkeit der Hansenschen Methode bildet die Wahl der Coordinaten, nämlich der mittleren Länge oder der Zeit, und des durch die gestörte mittlere Anomalie berechneten Radius vector. Hierdurch wird erreicht, dass die doppelte Integration nur auf die eine Coordinate, die mittlere Länge beschränkt wird, und daher nur in dieser Glieder vorkommen können, die wegen des Quadrats eines kleinen Divisors gross werden.

§ 2.

Ist $n_0 z$ die gestörte mittlere Anomalie, $\bar{f}$ die wahre, $\bar{\epsilon}$ die excentrische Anomalie, und ist v der Winkel zwischen dem Radius vector und einer in die Bahnebene fallenden Axe X, die vom aufsteigenden Knoten soweit entfernt ist, wie der Widderpunkt vom letzteren, so hat man mit bekannten Bezeichnungen

(1) $$n_0 z = \bar{\epsilon} - e_0 \sin\bar{\epsilon},\quad \bar{r}\sin\bar{f} = a_0 \cos\varphi_0 \sin\bar{\epsilon},\quad \bar{r}\cos\bar{f} = a_0(\cos\epsilon_0 - e_0),\quad r = \bar{r}(1+v),\quad v = \bar{f} + \pi_0$$

z und v müssen so bestimmt werden, dass der Ort und die Geschwindigkeit des gestörten Planeten zu jeder Zeit dargestellt werden.

Zu dem Ende verbindet Hansen diese Gleichungen mit einem analogen, von veränderlichen osculirenden Elementen abhängigen System

(2) $$nt + c = \epsilon - e\sin\epsilon,\quad r\sin f = a\cos\varphi\sin\epsilon,\quad r\cos f = a(\cos\epsilon - e),\quad v = f + \chi$$

und zwar bedeutet χ den Winkel zwischen der in die Bahnebene fallenden X-Axe und dem Perihel. Wegen der Bedingung der Osculation müssen nicht nur v und r in beiden Systemen gleich sein, sondern auch die ersten Differentialquotienten der Coordinaten nach der Zeit in der gestörten und ungestörten Bewegung dieselbe Form haben. Es ist also

(3) $$\bar{f} + \pi_0 = f + \chi,\qquad \frac{df}{dt} = \frac{d\bar{f}}{dz}\frac{dz}{dt},\qquad 1 + v = \frac{r}{\bar{r}}$$

Mit Berücksichtigung der Gleichungen (1) und (2) erhält man aus (3)

(4) $$\frac{dz}{dt} = \frac{n}{n_0}\,\frac{\left[1 + \xi\frac{\bar{r}}{a_0}\cos\bar{f} + \eta\frac{\bar{r}}{a_0}\sin\bar{f}\right]^2}{\left[1 - 2e_0\xi - \cos^2\varphi_0\xi^2 - \cos^2\varphi_0\eta^2\right]^{\frac{3}{2}}},\qquad 1 + v = \frac{1 - 2e_0\xi - \cos^2\varphi_0\xi^2 - \cos^2\varphi_0\eta^2}{\left(\frac{n}{n_0}\right)^{\frac{2}{3}}\left(1 + \xi\frac{\bar{r}}{a_0}\cos\bar{f} + \eta\frac{\bar{r}}{a_0}\sin\bar{f}\right)}$$

worin gesetzt ist $e\sin(\chi - \pi_0) = \eta\cos^2\varphi_0$ und $e\cos(\chi - \pi_0) = \xi\cos^2\varphi_0 + e_0$

Combinirt man beide Gleichungen, so wird

$$\frac{dz}{dt} = 1 + \bar{W} + \frac{h_0}{h}\left(\frac{v}{1+v}\right)^2$$

(5) $$\text{wo } h = \frac{an}{\cos\varphi},\quad h_0 = \frac{a_0 n_0}{\cos\varphi_0},\quad \bar{W} = 2\frac{h}{h_0} - \frac{h_0}{h} - 1 + 2\frac{h}{h_0}\xi\frac{\bar{r}}{a_0}\cos\bar{f} + 2\frac{h}{h_0}\eta\frac{\bar{r}}{a_0}\sin\bar{f}$$

(6) Ferner giebt (4) $$\frac{dz}{dt}(1+v)^2 = \frac{h_0}{h}$$

Die letzte Relation unterzieht Hansen einer vortheilhaften Umformung. Nimmt man an, dass für eine kleine Zeit die Elemente unveränderlich sind, so fällt bei einer Differentiation nach der Zeit $\frac{h_0}{h}$ fort, und der Differentialquotient von v nach der Zeit ist nur noch Function von W.

Digitized by Google

Um diese Differentiation äusserlich zu kennzeichnen, nennt man die Zeit, die nicht in die Elemente eingeht, τ und bezeichnet die von τ abhängigen Functionen den r, f, ϵ, z, v entsprechend beziehungsweise mit $\rho, \omega, \eta, \zeta, \beta$.

Die Gleichungen (5) und (6) schreiben sich dann

$$\frac{d\zeta}{d\tau}=1+W+\frac{h_0}{h}\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^2,\quad \frac{d\zeta}{d\tau}(1+\beta)^2=\frac{h_0}{h},\quad \text{und aus beiden folgt } \frac{d\beta}{d\tau}=-\frac{1}{2}\frac{dW}{d\zeta}$$

$$\text{wo } W=2\frac{h}{h_0}-\frac{h_0}{h}-1+2\frac{h}{h_0}\xi\frac{\bar\rho}{a_0}\cos\bar\omega+2\frac{h}{h_0}\eta\frac{\bar\rho}{a_0}\sin\bar\omega \text{ ist.}$$

Ist L eine Function der Zeit und der osculirenden Elemente, also $L=f(t,a,e\ldots)$, und wird $L=\Delta$, wenn t in τ verwandelt wird, $\Delta=f(\tau,a,e..)$, so ist $\frac{dL}{dt}=\overline{\left(\frac{d\Delta}{d\tau}\right)}$, und zwar soll der Strich anzeigen, dass nach der Differention t für τ gesetzt werden soll. Diese Relation ist eine Folge der Bedingung der Osculation, indem

$$\frac{\partial f}{\partial a}\frac{da}{dt}+\frac{\partial f}{\partial e}\frac{de}{dt}+\ldots=\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial a}\frac{da}{dt}+\frac{\partial x}{\partial e}\frac{de}{dt}+..\right)+\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial a}\frac{da}{dt}+\frac{\partial y}{\partial e}\frac{de}{dt}+\ldots\right)+\frac{\partial f}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial a}\frac{da}{dt}+\frac{\partial z}{\partial e}\frac{de}{dt}+\ldots\right)$$

wegen des Verschwindens der Kammergrössen gleich Null ist.

Die Anwendung dieses Satzes giebt sogleich

$$n_0 z=n_0 t+c_0+n_0\int\left\{\overline{W}+\frac{h_0}{h}\left(\frac{v}{1+v}\right)^2\right\}dt,\quad v=C-\frac{1}{2}\int\overline{\left(\frac{dW}{d\zeta}\right)}dt$$

Handelt es sich nur um Störungen erster Ordnung, so darf τ mit ζ und W_0 mit W identificirt werden. In W_0 werden dann ρ und ω ohne Rücksicht auf Störungen genommen.

$$\text{(I)}\qquad n_0 z=n_0 t+c_0+n_0\int\overline{W_0}\,dt\qquad v=C-\frac{1}{2}\int\overline{\left(\frac{dW}{d\tau}\right)}dt.$$

Die Lösung der Aufgabe ist also auf die Bestimmung von W_0 als Function der störenden Kräfte zurückgeführt. Ersetzt man ξ und η in W_0 durch ihre Werthe, so wird W_0 Function von h, $h e\cos\chi$, $h e\sin\chi$, also Function der osculirenden Elemente. Diese Grössen lassen sich eliminiren durch $\frac{dr}{dt}$ und $\frac{dv}{dt}$, deren Differentialquotienten nach t mit der Störungsfunction in bekannter Beziehung stehen. Man findet

$$W_0=\frac{2h_0\rho}{k^2(1+m)}\cos(\bar f-\omega)\,r\frac{dv}{dt}+\frac{2h_0\rho}{k^2(1+m)}\sin(\bar f-\omega)\frac{dr}{dt}-\frac{2\rho}{h_0 a_0\cos^2\varphi_0}[\cos(\bar f-\omega)-1]h-\frac{h_0}{h}-1$$

Da ρ und ω durch die Differentiation nach t nicht berührt werden, so wird

$$\text{(I}^a\text{)}\quad\begin{cases}\frac{dW_0}{dt}=h_0\left\{\frac{2\rho}{r}\cos(\bar f-\omega)-1+\frac{2h^2\rho}{h_0{}^2a_0\cos^2\varphi_0}[\cos(\bar f-\omega)-1]\right\}\overline{\left(\frac{d\Omega}{dv}\right)}+2h_0\frac{\rho}{r}\sin(\bar f-\omega)\,r\overline{\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)}\\ \text{Aus } hr^2\frac{dv}{dt}=k^2(1+m) \text{ folgt } d\frac{h_0}{h}=h_0\overline{\left(\frac{d\Omega}{dv}\right)}dt=\overline{\left(\frac{dW_0}{dt}\right)}dt\\ \text{Schliesslich wird noch } \overline{\left(\frac{d\Omega}{dv}\right)}=\overline{\left(\frac{d\Omega}{d\epsilon}\right)}\frac{r}{a\cos\varphi}-r\overline{\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)}\frac{e r\sin f}{a\cos^2\varphi} \text{ substituirt.}\end{cases}$$

§ 3.

Es erübrigt noch, die Störung der dritten Coordinate, $r\sin b$, zu bestimmen. Bedeutet θ_0 die Knotenlänge, i_0 die Bahnneigung zur Zeit t_0, ferner σ den Bogen zwischen der oben definirten

Digitized by Google

positiven X-Axe und dem aufsteigenden Knoten der Bahn zur Zeit t, so ist, wenn s die Störung von sin b bezeichnet,

$$\sin b = \sin i \sin(v-\sigma) = \sin i_0 \sin(v-\theta_0) + s$$

Durch Einführung von $p = \sin i \sin(\sigma-\theta_0)$, $q = \sin i \cos(\sigma-\theta_0) - \sin i_0$ wird

$$\frac{rs}{a_0} = u = \frac{\bar{r}}{a_0} q \sin(\bar{f}+\pi_0-\theta_0) - \frac{\bar{r}}{a_0} p \cos(\bar{f}+\pi_0-\theta_0)$$

Da nun p und q von osculirenden Elementen abhängen und zwar von

$$\alpha'' = -\sin i \sin\sigma \quad \beta'' = \sin i \cos\sigma,$$

so muss man diese als Function der Störungsfunction Ω darstellen. Es ist

$$r \sin b = \alpha''(r\cos v) + \beta''(r \sin v) = \alpha'' X + \beta'' Y$$

Man definirt nun $r \sin b$ als die z-Coordinate des Planeten in Bezug auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem xyz und transformirt letzteres in ein Coordinatensystem, dessen XY-Ebene in die Bahnebene fällt, und dessen X-Axe die oben angegebene Richtung hat. Die Transformation geschieht durch folgende Gleichungen

$$x = \alpha X + \beta Y \quad y = \alpha' X + \beta' Y \quad z = \alpha'' X + \beta'' Y;$$

ferner muss $0 = \frac{d\alpha}{dt} X + \frac{d\beta}{dt} Y$, $0 = \frac{d\alpha'}{dt} X + \frac{d\beta'}{dt} Y$, $0 = \frac{d\alpha''}{dt} X + \frac{d\beta''}{dt} Y$ sein, weil die Differentialquotienten nach der Zeit in der gestörten und ungestörten Bewegung dieselbe Form haben müssen. Den Grössen α und β analog mögen die Richtungscosinus der xyz-Axen gegen die Z-Axe durch γ, γ', γ'' ausgedrückt werden; es wird $\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right) = \gamma\left(\frac{d\Omega}{dx}\right) + \gamma'\left(\frac{d\Omega}{dy}\right) + \gamma''\left(\frac{d\Omega}{dz}\right)$, wenn nach der Differentiation $Z=0$ gesetzt wird.

Mit Bezugnahme auf diese Relationen geben die fundamentalen Differentialgleichungen (§ 1)

$$\frac{d\alpha''}{dt}\frac{dX}{dt} + \frac{d\beta''}{dt}\frac{dY}{dt} = \gamma'' k^2(1+m)\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$$

Combinirt man diese mit $\frac{d\alpha''}{dt} X + \frac{d\beta''}{dt} Y = 0$, so wird

$$\frac{d\alpha''}{dt} = -\frac{k^2(1+m)}{X\frac{dY}{dt} - Y\frac{dX}{dt}} \gamma'' Y \left(\frac{d\Omega}{dZ}\right), \quad \frac{d\beta''}{dt} = -\frac{k^2(1+m)}{X\frac{dY}{dt} - Y\frac{dX}{dt}} \gamma'' X \left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$$

$$\text{oder } \frac{d\alpha''}{dt} = -h \cos i \, r \sin v \left(\frac{d\Omega}{dZ}\right) \qquad \frac{d\beta''}{dt} = -h \cos i \, r \cos v \left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$$

In u setzt man τ anstatt t und nennt diese Function R. Es folgt dann

$$\text{(II)} \qquad \frac{dR}{dt} = h r \frac{\rho}{a_0} \sin(\omega - \bar{f}) \left(\frac{d\Omega}{dZ}\right), \quad u = \bar{R} \text{ und } u = \int \left(\frac{d\bar{R}}{d\tau}\right) dt.$$

§ 4.

Für die Berechnung der Störungen erster Ordnung ist also $\left(\frac{d\Omega}{d\epsilon}\right)$, $a r \left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$ und $\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$ durch bekannte Grössen auszudrücken.

Zur Vereinfachung der Störungsfunction Ω wählt man die Hülfswinkel Φ und Ψ, welche die Bögen zwischen dem gegenseitigen Knoten und dem bezüglichen Knoten der beiden Bahnebenen sein mögen, und bestimmt diese in erster Näherung durch die Elemente für $t=0$ $i_0, \theta_0, i'_0, \theta'_0$. Ferner

Digitized by Google

sei die gegenseitige Neigung der beiden Bahnen gleich J und die Perihelabstände vom gegenseitigen Knoten beziehungsweise Π und Π'. Setzt man in erster Näherung

$$\Pi_0 = \pi_0 - \theta_0 - \Phi_0, \quad \Pi'_0 = \pi'_0 - \theta'_0 - \Psi'_0$$

und führt in den Ausdruck von Ω (§ 1) die gegenseitige Entfernung Δ beider Planeten ein, so ergiebt sich für Störungen erster Ordnung

$$\Omega = \frac{m'}{1+m}\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{r}{r'^2}H\right) \text{ und } H = \cos(f+\Pi_0)\cos(f'+\Pi'_0) + \sin(f+\Pi_0)\sin(f'+\Pi'_0)\cos J_0$$

und weiterhin

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} a\Omega = \mu\left(\frac{a}{\Delta}\right) - (H) \qquad ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right) = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3\left\{\alpha^2\left(\frac{r'}{a'}\right)^2 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right\} - \frac{1}{2}\mu\left(\frac{a}{\Delta}\right) - (H) \\ a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right) = -\mu\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3 \alpha \sin J\left(\frac{r'}{a'}\right)\sin(f'+\Pi') + (J) \\ \text{wo } \mu = \frac{m'}{1+m}206265'', \ \alpha = \frac{a'}{a}, \ (H) = \frac{\mu}{\alpha^2}\left(\frac{a'}{r'}\right)^2\left(\frac{r}{a}\right)H, \quad (J) = \frac{\mu}{\alpha^2}\sin J\left(\frac{a'}{r'}\right)^2\sin(f'+\Pi') \end{cases}$$

Abschnitt II.

Berechnung der durch Jupiter bewirkten allgemeinen Störungen.

§ 5.

Die der Berechnung zu Grunde gelegten Elemente der Feronia habe ich den Angaben des Herrn Prof. C. H. F. Peters entlehnt; die Elemente des Jupiter habe ich aus dem XII. Bande der Pariser Annalen erhalten mit Ausnahme der Masse, welche dem Berliner Jahrbuch entnommen wurde.

(72) Feronia			Jupiter	
Osculirende Elemente für 1861 Juni 17			Mittlere Elemente für 1861.0	
Epoche 1861 Juni 17 0^h Berlin.				
c	272° 13′ 42″.0		c′	136° 7′ 42″.3
π	307 58 10.4	Mittl. Aeq. 1870.0	π′	12 13 7.7
θ	207 48 31.7		θ′	99 7 27.9
i	5 23 52.9		i′	1 18 37.9
φ	6 52 45.9		φ′	2 46 0.31
log a	0.3552747		log a′	0.7162371
n	1040″.1468		n′	299″.12834
			m′	$\frac{1}{1047.87}$

Das Verhältniss der mittleren Bewegungen $\mu = \frac{n'}{n} = 0.287583$ giebt den kleinsten Divisor $2 - 7\mu = -0.013080$, aus welchem Grunde den Gliedern mit den Argumenten $\epsilon - 7\epsilon'$, $2\epsilon - 7\epsilon'$, $3\epsilon - 7\epsilon'$ eine besondere Sorgfalt zugewandt werden musste.

Mit Hülfe der obigen Angaben fanden sich

$$\Pi = 88^\circ\, 5'\, 36''.29 \quad \Pi' = 152^\circ\, 24'\, 4''.30 \quad J = 5^\circ\, 56'\, 54''.47.$$

Digitized by Google

Aus den Gleichungen (III) § 4 ersieht man, dass es vor Allem auf die Entwickelung von $\left(\frac{a}{\Delta}\right)$ und $\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3$ ankommt. Substituirt man in den Ausdruck $\left(\frac{\Delta}{a}\right)^2 = \left(\frac{r}{a}\right)^2 + \left(\frac{r'}{a'}\right)^2 \alpha^2 - 2\left(\frac{r}{a}\right)\left(\frac{r'}{a'}\right)\alpha H$ die excentrischen Anomalien ϵ und ϵ', so wird $\left(\frac{\Delta}{a}\right)^2 = \gamma_0 - \gamma_1 \cos\epsilon' - \beta_0 \sin\epsilon' + \gamma_2 \cos 2\epsilon'$, wo $\gamma_0, \gamma_1, \beta_0$ Functionen der excentrischen Anomalie des gestörten Planeten sind, und $\gamma_2 = \alpha^2 e'^2$ ist. Um diesen Ausdruck auf eine der Rechnung zugängliche Form zu bringen, werden in β_0 und γ_1 die Coefficienten von $\cos\epsilon$ und $\sin\epsilon$ durch folgende constanten Hülfsgrössen zusammengezogen.

K	152° 31′ 40″.81	log k	9.9994988	P	151° 6′ 7″.64	log p	0.6717240
K′	152 16 26.37	— k′	9.9981605	V	295 40 34.95	— v	0.6587565
W	144 33 54.80	— w	0.6588053	R	6.246821		
W′	144 36 53.72	— w′	0.6591902	log γ_2	8.089283		

§ 6.

Zur weiteren Vereinfachung von $\left(\frac{\Delta}{a}\right)^2$ wird $D = \gamma_0 + \frac{1}{2}\gamma_2$, $\beta_0 = f \sin F$, $\gamma_1 = f \cos F$ gesetzt, welche Grössen Function der vorstehenden Constanten und der excentrischen Anomalie ϵ sind. Es wird $\left(\frac{\Delta}{a}\right)^2 = [D - f\cos(\epsilon' - F)] + \frac{1}{2}\gamma_2 \cos 2\epsilon'$, also

$$\left(\frac{a}{\Delta}\right) = \frac{1}{[D - f\cos(\epsilon' - F)]^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{4}\frac{\gamma_2 \cos 2\epsilon'}{[D - f\cos(\epsilon' - F)]^{\frac{3}{2}}} + \frac{3}{64}\frac{\gamma_2^2(1 + \cos 4\epsilon')}{[D - f\cos(\epsilon' - F)]^{\frac{5}{2}}}$$

$$\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3 = \frac{1}{[D - f\cos(\epsilon' - F)]^{\frac{3}{2}}} - \frac{3}{4}\frac{\gamma_2 \cos 2\epsilon'}{[D - f\cos(\epsilon' - F)]^{\frac{5}{2}}} + \frac{15}{64}\frac{\gamma_2^2(1 + \cos 4\epsilon')}{[D - f\cos(\epsilon' - F)]^{\frac{7}{2}}}$$

Man kann nun setzen

$$[D - f\cos(\epsilon' - F)]^{-\frac{n}{2}} = \alpha_0^{(n)} + 2\alpha_1^{(n)}\cos(\epsilon' - F) + 2\alpha_2^{(n)}\cos 2(\epsilon' - F) + 2\alpha_3^{(n)}\cos 3(\epsilon' - F) + \ldots$$

und allgemein hat man für die Coefficienten den Ausdruck

$$\alpha_i^{(n)} = \int_0^{\pi} [D - f\cos(\epsilon' - F)]^{-\frac{n}{2}} \cos i(\epsilon' - F)\, d(\epsilon' - F),$$

welcher eine Beziehung zwischen drei auf einander folgenden Coefficienten erkennen lässt. Unmittelbar braucht man mithin nur $\alpha_0^{(n)}$ zu rechnen, und zwar kann man dieses bequem nach den Elementen der elliptischen Functionen bestimmen. Hiermit ist die Entwickelung nach der excentrischen Anomalie des störenden Planeten analytisch ausgeführt, und es sind die Coefficienten Function der excentrischen Anomalie des gestörten Planeten. Rechnet man also die D, f, F und mit diesen die α-Coefficienten für verschiedene Punkte der Kreisperipherie, so kann man durch das Verfahren der mechanischen Quadratur aus speciellen Entwickelungen von $[D - f\cos(\epsilon' - F)]^{-\frac{n}{2}}$ die allgemeine erhalten. Die Berechnung wird sehr einfach, wenn man gleichmässig vertheilte Punkte wählt. In unserem Falle wurde der Umkreis in 16 gleiche Theile getheilt, und die erwähnten Grössen wurden für die verschiedenen Theilpunkte gerechnet.

Digitized by Google

ε	D	log f	F—ε	ε	D	log f	F—ε
0° 0′	6.136 411	0.629 5959	301° 53′ 3″.85	180° 0′	6.424 449	0.691 0924	290° 20′ 58″.86
22 30	6.221 152	0.650 4037	302 43 27.57	202 30	6.335 506	0.674 0107	289 0 42.71
45 0	6.311 626	0.670 9818	302 27 19.86	225 0	6.234 886	0.653 4539	288 35 2.48
67 30	6.396 259	0.688 5373	301 15 47.05	247 30	6.140 109	0.632 2033	289 16 28.92
90 0	6.464 365	0.701 2871	299 23 42.97	270 0	6.067 801	0.614 0964	291 7 44.63
112 30	6.506 486	0.708 2082	297 6 43.93	292 30	6.029 881	0.603 2896	293 54 35.22
135 0	6.515 300	0.708 8050	294 40 14.66	315 0	6.031 213	0.602 6698	297 4 8.21
157 30	6.487 264	0.702 9889	292 19 40.91	337 30	6.069 394	0.612 3403	299 54 49.24

Statt der Coefficienten α wurde angesetzt $\beta_i^1 = \frac{1}{8}\mu\alpha_i^{(1)}$, $\beta_i^3 = \frac{1}{8}\mu\alpha^2\alpha_i^{(3)}$, $\beta_i^5 = \frac{1}{8}\alpha^4\mu\alpha_i^{(5)}$ (bez. ihre Logarithmen), um der später erforderlichen Multiplicationen mit $\mu = m' 206265''$, α^2 resp. α^4, und der bei der mechanischen Quadratur nöthigen Division durch 8 überhoben zu sein.

ε	β_0^1	β_1^1	β_2^1	β_3^1	β_4^1	β_5^1	β_6^1	β_7^1	β_8^1	β_9^1
0	1.049 0090	0.363 8223	9.848 4127	9.377 162	8.926 452	8.48 765	8.05 663	7.631 089	7.20 963	6.7913
1	1.051 2187	0.388 0802	9.894 0266	9.443 954	9.014 349	8.59 661	8.18 664	7.782 135	7.38 170	6.9844
2	1.053 7838	0.412 7917	9.940 1110	9.511 212	9.102 699	8.70 601	8.31 706	7.933 569	7.55 413	7.1778
3	1.056 2083	0.434 2325	9.979 8340	9.569 028	9.178 529	8.79 982	8.42 882	8.063 259	7.70 175	7.3434
4	1.057 9857	0.449 6725	0.008 3655	9.610 503	9.232 887	8.86 703	8.50 886	8.156 120	7.80 742	7.4618
5	1.058 7666	0.457 5004	0.022 9308	9.631 725	9.260 733	8.90 148	8.54 991	8.203 759	7.86 164	7.5226
6	1.058 4773	0.457 2266	0.022 6716	9.631 481	9.260 503	8.90 126	8.54 971	8.203 573	7.86 147	7.5225
7	1.057 3047	0.449 2743	0.008 2381	9.610 643	9.233 293	8.86 770	8.50 980	8.157 323	7.80 889	7.4636
8	1.055 5637	0.434 6537	9.981 2781	9.571 483	9.181 992	8.80 429	8.43 429	8.069 731	7.70 922	7.3518
9	1.053 5594	0.414 7710	9.944 2123	9.517 414	9.110 994	8.71 640	8.32 953	7.948 120	7.57 076	7.1965
10	1.051 5272	0.391 5685	9.900 5886	9.453 562	9.026 993	8.61 229	8.20 534	7.803 859	7.40 644	7.0122
11	1.049 6541	0.367 8937	9.855 8067	9.387 852	8.940 428	8.50 491	8.07 716	7.654 899	7.23 671	6.8217
12	1.048 1242	0.347 6752	9.817 4411	9.331 478	8.866 101	8.41 265	7.96 700	7.526 845	7.09 077	6.6578
13	1.047 1383	0.335 3127	9.794 0078	9.297 052	8.820 715	8.35 633	7.89 974	7.448 654	7.00 165	6.5578
14	1.046 8898	0.334 0665	9.791 7901	9.293 869	8.816 571	8.35 122	7.89 367	7.441 628	6.99 367	6.5489
15	1.047 5106	0.344 4118	9.811 6006	9.323 079	8.855 152	8.39 916	7.95 096	7.508 262	7.06 964	6.6342

ε	β_0^3	β_1^3	β_2^3	β_3^3	β_4^3	β_5^3	β_6^3	β_7^3	β_8^3	β_9^3	β_{10}^3
0	1.201 7708	0.957 4617	0.651 2144	0.319 594	9.974 071	9.619 754	9.259 364	8.894 528	8.52 630	8.15 538	7.7823
1	1.221 1635	0.995 1196	0.708 8323	0.397 656	0.072 785	9.739 226	9.399 658	9.055 684	8.70 834	8.35 833	8.0062
2	1.243 1725	1.035 0886	0.768 6130	0.477 785	0.173 492	9.860 633	9.541 836	9.218 678	8.89 218	8.56 304	8.2318
3	1.264 0760	1.071 0762	0.821 4006	0.547 877	0.261 108	9.965 886	9.664 795	9.359 387	9.05 067	8.73 933	8.4259
4	1.280 0452	1.097 6754	0.859 9376	0.598 741	0.324 468	0.041 833	9.753 381	9.460 647	9.16 463	8.86 600	8.5653
5	1.288 1716	1.111 2134	0.879 5870	0.624 712	0.356 853	0.080 680	9.798 719	9.512 494	9.22 299	8.93 090	8.6367
6	1.287 3170	1.110 3706	0.878 7575	0.623 896	0.356 051	0.079 892	9.797 945	9.511 734	9.22 225	8.93 017	8.6360
7	1.278 2302	1.096 0787	0.858 5870	0.597 645	0.323 630	0.041 255	9.753 064	9.460 592	9.16 483	8.86 647	8.5660
8	1.262 9454	1.070 7814	0.822 0413	0.549 483	0.263 691	9.969 454	9.669 352	9.364 934	9.05 721	8.74 687	8.4344
9	1.244 0125	1.037 6931	0.773 1748	0.484 360	0.182 106	9.871 297	9.554 558	9.233 464	8.90 903	8.58 196	8.2528
10	1.224 0480	1.000 6075	0.717 1801	0.408 937	0.087 031	9.756 454	9.419 878	9.078 902	8.73 456	8.38 756	8.0384
11	1.205 5987	0.964 1514	0.661 0199	0.332 587	9.990 284	9.639 201	9.282 055	8.920 469	8.55 549	8.18 783	7.8180
12	1.191 0619	0.933 9019	0.613 7127	0.267 842	9.907 938	9.539 172	9.164 293	8.784 943	8.40 218	8.01 672	7.6293
13	1.182 4823	0.915 6401	0.584 9971	0.228 455	9.857 791	9.478 215	9.092 500	8.702 295	8.30 866	7.91 233	7.5138
14	1.181 2585	0.913 5633	0.582 0013	0.224 523	9.852 912	9.472 387	9.085 720	8.694 562	8.29 998	7.90 269	7.5032
15	1.187 8835	0.928 4760	0.605 8565	0.257 504	9.895 097	9.523 816	9.146 416	8.764 541	8.37 925	7.99 126	7.6014

Digitized by Google

ϵ	β_0^5	β_1^5	β_2^5	β_3^5	β_4^5	β_5^5	β_6^5	β_7^5	β_8^5
0	1.47555	1.36841	1.17432	0.93360	0.6638	0.3743	0.0705	9.7557	9.4324
1	1.52262	1.42706	1.24965	1.02747	0.7771	0.5075	0.2238	9.9295	9.6267
2	1.57532	1.49071	1.32953	1.12559	0.8945	0.6446	0.3810	0.1068	9.8245
3	1.62494	1.54916	1.40148	1.21285	0.9979	0.7647	0.5181	0.2612	9.9962
4	1.66280	1.59303	1.45478	1.27695	1.0735	0.8522	0.6177	0.3730	0.1204
5	1.68235	1.61557	1.48209	1.20977	1.1122	0.8969	0.6686	0.4303	0.1839
6	1.68094	1.61417	1.48070	1.30838	1.1108	0.8956	0.6673	0.4289	0.1826
7	1.66001	1.59037	1.45230	1.27470	1.0715	0.8504	0.6162	0.3718	0.1194
8	1.62391	1.54861	1.40168	1.21390	0.9999	0.7676	0.5220	0.2660	0.0020
9	1.57838	1.49482	1.33523	1.13308	0.9038	0.6559	0.3942	0.1221	9.8418
10	1.52965	1.43571	1.26066	1.04112	0.7936	0.5268	0.2460	9.9546	9.6547
11	1.48415	1.37885	1.18738	0.94957	0.6829	0.3965	0.0957	9.7842	9.4641
12	1.44817	1.33260	1.12668	0.87293	0.5896	0.2862	9.9682	9.6393	9.3017
13	1.42709	1.30504	1.09017	0.82660	0.5331	0.2192	9.8907	9.5511	9.2029
14	1.42447	1.30184	1.08618	0.82175	0.5273	0.2125	9.8831	9.5426	9.1935
15	1.44127	1.32420	1.11621	0.86018	0.5745	0.2686	9.9482	9.6168	9.2768

Ausser diesen Coefficienten berechnete ich folgende $\beta_i^7 = \alpha_i^{(7)} \mu \cdot \frac{206265''}{8} \alpha^4$, da dieselben im Endresultate wegen des kleinen Divisors fast 1'' hervorbrachten.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
β_0^7	1.096	1.173	1.259	1.339	1.401	1.432	1.430	1.397	1.339	1.265	1.185	1.110	1.050	1.015	1.011	1.039
β_1^7	1.039	1.123	1.216	1.301	1.365	1.399	1.397	1.362	1.301	1.222	1.136	1.054	0.988	0.949	0.945	0.976
β_2^7	0.908	1.005	1.110	1.206	1.277	1.313	1.311	1.273	1.206	1.117	1.019	0.925	0.847	0.801	0.796	0.834
β_3^7	0.727	0.841	0.961	1.070	1.150	1.191	1.189	1.147	1.070	0.970	0.857	0.747	0.655	0.600	0.594	0.640

§ 7.

Setzt man

$$Y^c_{0,\varkappa} = \alpha^{(n)}_{0,\varkappa},\ Y^c_{1,\varkappa} = \alpha^{(n)}_{1,\varkappa} \cos\left(F_\varkappa - \epsilon_\varkappa\right),\ Y^c_{2,\varkappa} = \alpha^{(n)}_{2,\varkappa} \cos 2\left(F_\varkappa - \epsilon_\varkappa\right),\ Y^c_{3,\varkappa} = \alpha^{(n)}_{3,\varkappa} \cos 3\left(F_\varkappa - \epsilon_\varkappa\right), \text{ etc.}$$

$$Y^s_{1,\varkappa} = \alpha^{(n)}_{1,\varkappa} \sin\left(F_\varkappa - \epsilon_\varkappa\right),\ Y^s_{2,\varkappa} = \alpha^{(n)}_{2,\varkappa} \sin 2\left(F_\varkappa - \epsilon_\varkappa\right),\ Y^s_{3,\varkappa} = \alpha^{(n)}_{3,\varkappa} \sin 3\left(F_\varkappa - \epsilon_\varkappa\right), \text{ etc.}$$

so wird $\left[D_\varkappa - f_\varkappa \cos(\epsilon' - F_\varkappa)\right]^{-\frac{n}{2}} = Y^c_{0,\varkappa} + 2\,Y^c_{1,\varkappa} \cos(\epsilon' - \epsilon) + 2\,Y^c_{2,\varkappa} \cos 2\,(\epsilon' - \epsilon) + 2\,Y^c_{3,\varkappa} \cos 3\,(\epsilon' - \epsilon) + \ldots$

$$+ 2\,Y^s_{1,\varkappa} \sin(\epsilon' - \epsilon) + 2\,Y^s_{2,\varkappa} \sin 2\,(\epsilon' - \epsilon) + 2\,Y^c_{3,\varkappa} \sin 3\,(\epsilon' - \epsilon) + \ldots$$

Die Coefficienten $Y^c_{i,\varkappa}$ und $Y^s_{i,\varkappa}$ sind Functionen von $\epsilon_\varkappa$ und lassen sich als specielle Werthe von folgenden nach ϵ fortschreitenden Reihen auffassen.

$$Y^c_i = \Sigma C^c_{i,\nu} \cos \nu\epsilon + \Sigma C^s_{i,\nu} \sin \nu\epsilon$$

$$Y^s_i = \Sigma S^c_{i,\nu} \cos \nu\epsilon + \Sigma S^s_{i,\nu} \sin \nu\epsilon$$

Die Substitution dieser Reihen in die allgemeine Reihe von $[D - f\cos(\epsilon' - F)]^{-\frac{n}{2}}$ giebt

$$[D - f\cos(\epsilon' - F)]^{-\frac{n}{2}} = \Sigma\Sigma \left\{ C^c_{i,\nu} \mp S^s_{i,\nu} \right\} \cos[(i \mp \nu)\epsilon - i\epsilon'] \mp \Sigma\Sigma \left\{ C^s_{i,\nu} \mp S^c_{i,\nu} \right\} \sin[(i \mp \nu)\epsilon - \epsilon']$$

Nach Vorschrift dieser Ausdrücke wurden zunächst die $Y^c_{i,\varkappa}$ und $Y^s_{i,\varkappa}$ berechnet und aus diesen vermittelst der mechanischen Quadratur, die sich für die gewählte Theilung der Peripherie besonders einfach gestaltet, die Coefficienten $C^c_{i,\nu}$, $C^s_{i,\nu}$, $S^c_{i,\nu}$, $S^s_{i,\nu}$ ermittelt. Durch Addition und Subtraction ergaben sich gemäss der letzten Formel $[D - f\cos(\epsilon' - F)]$ für die Potenzen $-\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{2}$, $-\frac{5}{2}$, $-\frac{7}{2}$

Digitized by Google

Nach den Formeln des § 6 berechnete ich dann folgende Reihen, in denen für das constante Glied das Doppelte angesetzt ist.

ϵ, ϵ'	$\mu\left(\frac{a}{\Delta}\right)$ cos	$\mu\left(\frac{a}{\Delta}\right)$ sin	$\mu\alpha^2\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3$ cos	$\mu\alpha^2\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3$ sin
0 0	+180″.6393		+275″.2778	
1 0	− 0.691070	+ 1″.021700	− 9.78270	+ 14″.06062
2 0	− 0.06546	− 0.02695	− 0.5202	− 0.8233
3 0	+ 0.0030	− 0.0030	+ 0.067	− 0.028
4 0	+ 0.0001	+ 0.0002		+ 0.006
−4−1			− 0.001	
−3−1	+ 0.0004	− 0.0001	+ 0.007	− 0.005
−2−1	− 0.0017	+ 0.0069	+ 0.029	+ 0.104
−1−1	− 0.0730	+ 0.0182	− 1.6482	+ 0.2054
0−1	+ 2.5985	− 4.6794	+ 14.2845	− 25.6482
1−1	+ 17.4069	+36.1761	+ 72.4917	+150.6317
2−1	− 0.4054	− 0.0469	− 8.822	− 1.329
3−1	− 0.0083	− 0.0419	+ 0.198	− 0.537
4−1	+ 0.0021	+ 0.0007	+ 0.037	+ 0.025
5−1	− 0.0001	+ 0.0001	− 0.003	+ 0.002
−3−2				− 0.001
−2−2	+ 0.0005	+ 0.0004	+ 0.012	+ 0.005
−1−2	− 0.0037	+ 0.0045	− 0.076	+ 0.141
0−2	− 0.1903	− 0.2045	− 1.682	− 2.267
1−2	+ 3.3808	+ 0.1959	+ 25.976	+ 1.519
2−2	− 8.2099	+10.2830	− 55.244	+ 69.213
3−2	− 0.0546	− 0.1388	− 1.359	− 4.214
4−2	+ 0.0173	− 0.0146	+ 0.321	− 0.081
5−2	+ 0.0002	+ 0.0011	− 0.002	+ 0.027
6−2	− 0.0001		− 0.002	− 0.001
−2−3			+ 0.001	− 0.001
−1−3		+ 0.0006	+ 0.006	+ 0.015
0−3	− 0.0157	+ 0.0043	− 0.2583	+ 0.0372
1−3	+ 0.1103	− 0.2382	+ 1.4259	− 2.6860
2−3	+ 0.6918	+ 1.6791	+ 6.9723	+ 16.9261
3−3	− 4.6510	− 1.0649	− 43.211	− 9.883
4−3	+ 0.0368	− 0.0440	+ 1.523	− 1.499
5−3	+ 0.0105	+ 0.0043	+ 0.134	+ 0.129
6−3	− 0.0004	+ 0.0003	− 0.013	+ 0.007
7−3				− 0.001
−1−4	+ 0.0001		+ 0.002	
0−4	− 0.0003	+ 0.0010	− 0.0099	+ 0.0218
1−4	− 0.0129	− 0.0148	− 0.1869	− 0.2554
2−4	+ 0.1881	+ 0.0033	+ 2.5757	+ 0.1263
3−4	− 0.6097	+ 0.6795	− 7.642	+ 8.519
4−4	− 0.4024	− 1.7683	− 4.778	− 20.966
5−4	+ 0.0224	+ 0.0043	+ 0.962	+ 0.324
6−4	+ 0.0004	+ 0.0055	− 0.024	+ 0.099
7−4	− 0.0002	− 0.0001	− 0.007	− 0.005
0−5	−	+ 0.0001	+ 0.001	+ 0.002
1−5	− 0.0014	+ 0.0003	− 0.031	+ 0.004
2−5	+ 0.0072	− 0.0158	+ 0.144	− 0.271
3−5	+ 0.0475	+ 0.1087	+ 0.724	+ 1.756
4−5	− 0.4257	− 0.1236	− 6.395	− 1.855

ϵ, ϵ'	$\mu\left(\frac{a}{\Delta}\right)$ cos	$\mu\left(\frac{a}{\Delta}\right)$ sin	$\mu\alpha^2\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3$ cos	$\mu\alpha^2\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3$ sin
5−5	+0″.5540	−0″.4414	+7″.996	−6″.376
6−5	+0.0030	+0.0089	+0.070	+0.472
7−5	−0.0022	+0.0013	−0.052	+0.015
8−5		−0.0001	+0.001	−0.004
1−6	−0.00004	+0.00010	−0.00118	+0.00271
2−6	−0.00097	−0.00114	−0.01930	−0.02695
3−6	+0.01300	+0.00007	+0.25649	+0.01192
4−6	−0.0459	+0.0519	−0.858	+0.943
5−6	−0.0348	−0.2078	−0.612	−3.641
6−6	+0.2537	+0.1222	+4.323	+2.079
7−6	−0.0026	+0.0029	−0.181	+0.130
8−6	−0.0010	−0.0007	−0.020	−0.020
9−6			+0.002	−0.001
0−7			+0.00002	−0.00001
1−7	+0.000005	−0.000014	+0.000163	+0.000254
2−7	−0.000120	+0.000023	−0.003342	+0.000427
3−7	+0.000546	−0.001170	+0.014561	−0.027002
4−7	+0.00362	+0.00803	+0.07420	+0.17885
5−7	−0.0370	−0.0108	−0.767	−0.233
6−7	+0.0806	−0.0569	+1.614	−1.142
7−7		+0.1134	+0.005	+2.227
8−7	−0.0016	−0.0003	−0.092	−0.042
9−7	+0.0001	−0.0006	+0.002	−0.017
10−7			+0.001	+0.001
2−8			−0.00019	+0.00030
3−8	−0.00006	−0.00009	−0.00182	−0.00292
4−8	+0.0010		+0.026	+0.002
5−8	−0.0036	+0.0042	−0.091	+0.100
6−8	−0.0032	−0.0204	−0.072	−0.475
7−8	+0.0400	+0.0222	+0.902	+0.500
8−8	−0.0415	+0.0201	−0.923	+0.448
9−8	−0.0002	−0.0007	−0.003	−0.047
10−8	+0.0002	−0.0001	+0.008	−0.003
4−9		−0.0001	+0.002	−0.003
5−9	+0.0003	+0.0006	+0.007	+0.018
6−9	−0.0032	−0.0009	−0.085	−0.026
7−9	+0.0089	−0.0061	+0.230	−0.156
8−9	−0.0012	+0.0210	−0.030	+0.527
9−9	−0.0148	−0.0117	−0.369	−0.291
10−9	+0.0002	−0.0003	+0.018	−0.011
11−9		+0.0001	+0.003	+0.002
5−10			+0.002	
6−10			−0.010	+0.010
7−10			−0.008	−0.056
8−10			+0.134	+0.079
9−10			−0.245	+0.101
10−10			+0.046	−0.209
11−10			+0.009	+0.005

Digitized by Google

§ 8.

Statt der excentrischen Anomalie ϵ' des störenden Planeten wird zur Vereinfachung der Integration zunächst die mittlere Anomalie g' eingeführt. Bedeuten y, y', z' die zu ϵ, ϵ' und g' gehörigen imaginären Exponentialfunctionen und (i, i', c), (i, i', s) die Cosinus- resp. Sinus-Coefficienten vorstehender Reihen, so ist

$F = \frac{1}{2} \Sigma\Sigma[(i, i', c) - \sqrt{-1}\,(i, i', s)]\, y^i y'^{-i'}$ zu verwandeln in $F = \frac{1}{2} \Sigma\Sigma\,[((i, i', c)) - \sqrt{-1}\,((i, i', s))]\, y^i z'^{-i'}$.

Zu dem Ende muss $y'^{-i'}$ nach Potenzen von z' entwickelt werden; es sei also

(a) $$y'^{i'} = \Sigma P^{i'}_k z'^k.$$

Die allgemeine Form der Coefficienten $P^{i'}_k$ geht, wenn auf $g' = \epsilon' - e' \sin \epsilon'$ Rücksicht genommen wird und h die Basis des natürlichen Logarithmensystems bezeichnet, über in:

$$P^{i'}_k = \frac{i'}{2\pi k \sqrt{-1}} \int_{h^{-\pi\sqrt{-1}}}^{h^{+\pi\sqrt{-1}}} y'^{i'-k-1}\, h^{-\frac{ke'}{2}\left(y' - \frac{1}{y'}\right)} dy$$

Da $h^{\frac{-ke'}{2}\left(y' - \frac{1}{y'}\right)} = \Sigma_{-\infty}^{+\infty} J^r_{+\frac{ke'}{2}}\, y'^r$ ist, wo $J^r_{\frac{ke'}{2}} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(r\epsilon - ke' \sin \epsilon)\, d\epsilon$ die bekannte Transcendente bedeutet, so wird

(b) $$P^{i'}_k = \frac{i'}{k} J^{k-i'}_{\frac{ke'}{2}}$$

Die Transcendente J ist also zu ermitteln. Aus der Definition von $J^r_{\frac{ke'}{2}}$ findet man

(c) $$l J^{i-1}_l - i J^i_l + l J^{i+1}_l = 0 \text{ und ferner } J^0_l = 1 - \frac{l^2}{1^2} + \frac{l^4}{1^2 2^2} - \frac{l^6}{1^2 2^2 3^2} \pm \ldots.$$

Die erste dieser Gleichungen lässt sich auch schreiben $\frac{J^i_l}{J^{i-1}_l} = \frac{1}{\frac{i}{l} - \frac{J^{i+1}_l}{J^i_l}} = p_i$, folglich

(d) $$J^i_l = J^0_l\, p_1\, p_2\, p_3 \ldots p_i \text{ und } \frac{1}{p_i} = \frac{i}{l} - p_{i+1}$$

Bei Anwendung dieses Ausdrucks nimmt man i so gross an, dass $p_{i+1} = 0$ gesetzt werden kann. J^0_l ergiebt sich aus (c), J^i_l aus (d). Nach (b) rechnet man $P^{i'}_k$.

Aus der Excentricität der Jupitersbahn folgt $\log \lambda' = \log \frac{1}{2} e' = 8.382649$.

Die Werthe der $P^{i'}_k$ sind in der folgenden Tafel enthalten, und zwar ist $1 - P^i_{i'}$ statt $P^{i'}_{i'}$ angesetzt.

Digitized by Google

i'	k=−2	−1	0	+1	+2	+3	+4	+5	+6	+7	+8	+9
1	4.9716_n	6.46418_n	8.382649_n	6.76523_n	8.382142	6.94063	5.5729	4.246				
2		4.6708_n		8.683552_n	7.36710_n	8.682540	7.36601	6.0672	4.784	3.513		
3				6.94130	8.859264_n	7.71897_n	8.857745	7.63825	6.4009	5.1603		
4				4.9718_n	7.36702	8.98357_n	7.96841_n	8.98154	7.84144	6.65895	5.4585	4.249
5					5.67057_n	7.63960	9.07959_n	8.16166_n	9.07706	8.00420	6.8709	5.7080
6					3.831	7.1016_n	9.84313	9.15763_n	8.31932_n	9.154587	8.14010	7.0513
7						4.426	6.4180_n	8.00623	9.22319_n	8.45239_n	9.21963	8.25676
8							4.859	6.6692_n	8.14247	9.27953_n	8.56743_n	9.27545
9								5.200	6.8781_n	8.2595	9.3288_n	8.6686_n
10									5.48	7.057_n	8.6319	9.3723_n

Führt man in den ersten Ausdruck von F die Werthe für $y'^{-1'}$ ein, so folgen leicht die Beziehungen zwischen den Coefficienten $(i, i', \overset{\circ}{,})$ und $((i, i', \overset{\circ}{,}))$. Mit Benutzung der vorstehenden Tafel gehen $\mu\left(\frac{a}{\Delta}\right)$ und $\mu\,\alpha^2\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3$ in folgende Reihen über:

ε, g'	$\mu\left(\frac{a}{\Delta}\right)$ cos	$\mu\left(\frac{a}{\Delta}\right)$ sin	$\mu\,\alpha^2\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3$ cos	$\mu\,\alpha^2\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3$ sin	ε, g'	$\mu\left(\frac{a}{\Delta}\right)$ cos	$\mu\left(\frac{a}{\Delta}\right)$ sin	$\mu\,\alpha^2\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3$ cos	$\mu\,\alpha^2\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3$ sin
0 0	+180″.5139		+274″.5882		1—3	+0″.2889	—0″.1945	+ 2″.7501	— 2″.4428
1 0	— 1.10943	+ 0″.14902	— 11.49251	+ 10″.43007	2—3	+ 0.2745	+ 2.1649	+ 4.0211	+20.1551
2 0	— 0.05564	— 0.02566	— 0.3080	— 0.7886	3—3	— 4.5704	— 1.1310	—42.311	—10.847
3 0	+ 0.0032	— 0.0020	+ 0.062	— 0.015	4—3	+ 0.0743	+ 0.1253	+ 1.963	+ 0.515
4 0		+ 0.0002	— 0.001	+ 0.005	5—3	+ 0.0107	+ 0.0020	+ 0.076	+ 0.071
					6—3	— 0.0005	— 0.0002	— 1.012	— 0.001
—4—1			— 0.001		7—3				— 0.001
—3—1	+ 0.0004	— 0.0002	+ 0.007	— 0.005					
—2—1	— 0.0016	+ 0.0069	+ 0.032	+ 0.104	—1—4	+0.0001	+0.0001	+ 0.002	+ 0.002
—1—1	— 0.0778	+ 0.0285	— 1.6647	+ 0.2423	0—4	—0.0018	+0.0006	— 0.0320	+ 0.0178
0—1	+ 2.6054	— 4.6682	+ 14.3529	— 25.5313	1—4	+0.0038	—0.0301	— 0.0157	— 0.4379
1—1	+ 17.2337	+36.1454	+ 71.1977	+150.4684	2—4	+0.2163	+0.1500	+ 2.9081	+ 1.5380
2—1	— 0.0084	— 0.5416	— 6.145	— 4.653	3—4	—0.9449	+ 0.5831	—10.773	+ 7.507
3—1	— 0.0097	— 0.0361	+ 0.226	— 0.342	4—4	—0.3451	— 1.7398	— 3.861	—20.650
4—1	+ 0.0013	+ 0.0013	+ 0.023	+ 0.028	5—4	—0.0438	+0.0562	— 0.001	+ 1.071
5—1	— 0.0001		— 0.003	+ 0.001	6—4	+0.0018	+0.0053	— 0.003	+ 0.057
					7—4		—0.0003	— 0.002	— 0.006
—3—2				— 0.001					
—2—2	+ 0.0005	+ 0.0006	+ 0.012	+ 0.007	0—5	—0.0001	+0.0001	— 0.001	+ 0.004
—1—2	— 0.0057	+ 0.0053	— 0.117	+ 0.146	1—5	—0.0017	—0.0020	— 0.039	— 0.032
0—2	— 0.1261	— 0.3172	— 1.315	— 2.883	2—5	+0.0273	—0.0066	+ 0.415	— 0.170
1—2	+ 3.7845	+ 1.0847	+ 27.559	+ 5.341	3—5	—0.0337	+0.1676	— 0.244	+ 2.501
2—2	— 8.2501	+10.1365	— 55.826	+ 67.796	4—5	—0.4513	—0.2989	— 6.630	— 3.978
3—2	+ 0.2803	— 0.0609	+ 1.756	— 3.482	5—5	+0.5528	—0.4048	+ 8.053	— 5.731
4—2	+ 0.0137	— 0.0155	+ 0.200	— 0.020	6—5	—0.0327	—0.0089	— 0.539	+ 0.164
5—2	— 0.0005	+ 0.0008	— 0.009	+ 0.018	7—5	—0.0019	+0.0020	— 0.027	+ 0.018
6—2			— 0.001	— 0.001	8—5	+0.0001		+ 0.003	— 0.002
—1—3	— 0.0002	+ 0.0008	+ 0.001	+ 0.022	1—6	—0.0003		— 0.0056	+ 0.0007
0—3	— 0.0225	— 0.0097	— 0.3245	— 0.0966	2—6	+0.0014	—0.0025	+ 0.0181	— 0.0533

Digitized by Google

ϵ, g'	$\mu\left(\frac{a}{\Delta}\right)$ cos	$\mu\left(\frac{a}{\Delta}\right)$ sin	$\mu\,\alpha^2\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3$ cos	$\mu\,\alpha^2\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3$ sin	ϵ, g'	$\mu\left(\frac{a}{\Delta}\right)$ cos	$\mu\left(\frac{a}{\Delta}\right)$ sin	$\mu\,\alpha^2\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3$ cos	$\mu\,\alpha^2\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3$ sin
3—6	+0".0129	+0".0177	+0".2712	+0".2824	3—8	+0".0002	—0".0002	+0".0048	—0".0056
4—6	— 0.0991	+ 0.0225	— 1.648	+ 0.526	4—8	+ 0.0006	+ 0.0019	+ 0.020	+ 0.043
5—6	+ 0.0383	— 0.2543	+ 0.489	— 4.284	5—8	— 0.0098	— 0.0011	— 0.219	— 0.001
6—6	+ 0.2353	+ 0.1300	+ 3.970	+ 2.277	6—8	+ 0.0144	— 0.0272	+ 0.276	— 0.612
7—6	— 0.0023	— 0.0156	— 0.172	— 0.236	7—8	+ 0.0365	+ 0.0415	+ 0.818	+ 0.884
8—6	— 0.0013	— 0.0003	— 0.017	— 0.008	8—8	— 0.0400	+ 0.0148	— 0.895	+ 0.314
9—6		+ 0.0001	+ 0.002	+ 0.002	9—8	+ 0.0029	+ 0.0017	+ 0.072	+ 0.017
					10—8	+ 0.0002		+ 0.005	— 0.005
1—7	— 0.000020	— 0.000007	— 0.000380	+ 0.000513					
2—7	— 0.000089	— 0.000274	— 0.003338	— 0.005905	4—9			+ 0.006	+ 0.002
3—7	+ 0.002530	+ 0.000282	+ 0.054313	— 0.002528	5—9			— 0.025	+ 0.028
4—7	— 0.00770	+ 0.01315	— 0.12197	+ 0.27985	6—9			— 0.059	— 0.135
5—7	— 0.0346	— 0.0454	— 0.734	— 0.829	7—9			+ 0.391	— 0.001
6—7	+ 0.1151	— 0.0339	+ 2.198	— 0.718	8—9			— 0.236	+ 0.567
7—7	— 0.0078	+ 0.1063	— 0.189	+ 2.084	9—9			— 0.294	— 0.311
8—7	+ 0.0061	— 0.0039	+ 0.082	— 0.120	10—9			+ 0.008	+ 0.038
9—7	— 0.0002	— 0.0006	— 0.004	— 0.013	11—9			+ 0.001	+ 0.001

§ 9.

Um aus diesen Werthen nach Formel (III) § 4 die Störungsfunction und die Differentialquotienten derselben zu erhalten, muss man die Factoren von $\mu\left(\frac{a}{\Delta}\right)$ und $\mu\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3$ sowie die Grössen (H) und (J) entwickeln.

Man hat unmittelbar $\left(\frac{r}{a}\right)^2 = 1 + \frac{1}{2}e^2 - 2e\cos\epsilon + \frac{1}{2}e^2\cos 2\epsilon$

$\left(\frac{r'}{a'}\right)^2$ hingegen muss nach der mittleren Anomalie g' entwickelt werden. Bedenkt man, dass $\frac{d.r'^2}{a'^2 d g'} = 2e'\sin\epsilon' = e'\left(y' - y'^{-1}\right)$, so findet man durch die Reihe (a) mit Rücksicht auf (b) und (c) § 8

$$\left(\frac{r'}{a'}\right)^2 = 1 + \frac{3}{2}e'^2 - \frac{4}{1}J^1_{\lambda'}\cos g' - \frac{4}{4}J^2_{2\lambda'}\cos 2g' - \frac{4}{9}J^3_{3\lambda'}\cos 3g'$$

Zur Entwickelung von (H) wird in $(H) = \frac{\mu}{\alpha^2}\left(\frac{a'}{r'}\right)^2\left(\frac{r}{a}\right)H$ der Werth von H (§ 4) eingeführt, und ferner $\frac{r}{a}$ durch die excentrische Anomalie ϵ eliminirt. Es tritt dann $\left(\frac{a'}{r'}\right)^2\cos f'$ und $\left(\frac{a'}{r'}\right)^2\sin f'$ auf, die noch umgeformt werden müssen.

Aus den Differentialgleichungen der elliptischen Bewegung folgt:

$$\left(\frac{a'}{r'}\right)^2\cos f' = -\frac{d^2\cos\epsilon'}{d g'^2},\quad \left(\frac{a'}{r'}\right)^2\frac{\sin f'}{\cos\varphi'} = -\frac{d^2\sin\epsilon'}{d g'^2}$$

wonach auch diese Grössen sich durch die Reihe (a) § 8 entwickeln lassen. Aehnlich erhält man (J).

Die numerischen Werthe dieser Ausdrücke fanden sich wie folgt:

$$\left(\frac{r'}{a'}\right)^2 = 1 + (7.54345) - 2(8.683552)\cos g' - 2(6.76496)\cos 2g' - 2(5.1474)\cos 3g' - 2(3.65)\cos 4g'$$

Digitized by Google

$$\frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{r}{a}\right)^2 = (9.281179) - 2(8.356460)\cos\epsilon + 2(6.83279)\cos 2\epsilon$$

$$-\frac{\sin J}{\alpha}\left(\frac{r'}{a'}\right)\sin(f'+\Pi') = +(7.18015) - 2(8.018970)\cos(-g') - 2(6.40132)\cos(-2g') - 2(4.9598)\cos(-3g')$$
$$-2(8.300414)\sin(-g') - 2(6.68285)\sin(-2g') - 2(5.2414)\sin(-3g')$$

	(H)		(J)			(H)		(J)	
ϵ, g'	cos	sin	cos	sin	ϵ, g'	cos	sin	cos	sin
—1—1	+ 0″.0135	+ 0″.0238			—1—4	0″.0000	0″.0000		
0—1	— 1.9263	— 4.0034	+1″.7912	+3″.4245	0—4	—0.0011	—0.0024	+0″.0011	+0″.0021
+1—1	+16.0683	+33.3991			+1—4	+0.0096	+0.0200		
—1—2	+ 0.0011	+ 0.0026			0—5	—0.0001	—0.0002	+0.0001	+0.0002
0—2	— 0.1858	— 0.3863	+ 0.1728	+ 0.3304	+1—5	+0.0007	+0.0015		
+1—2	+ 1.5503	+ 3.2225							
					1—6	0.0000	+0.0001		
—1—3	+ 0.0001	+ 0.0002							
0—3	— 0.0151	— 0.0314	+ 0.0141	+ 0.0269	1—7	+0.000004	+0.000008	.	
+1—3	+ 0.1262	+ 0.2623							

Nach Vorschrift der Formeln (III) § 4 wurden diese Reihen mechanisch mit $\mu\alpha^2\left(\frac{a}{\Delta}\right)^2$ multiplicirt, und die einzelnen Entwickelungen zu einander addirt. Ich gebe hier nur die Differentialquotienten $ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$ und $a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$, da sich $a\Omega$ aus $\mu\left(\frac{a}{\Delta}\right)$ und (H) zusammensetzt.

	$ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$		$a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$			$ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$		$a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$	
ϵ, g'	cos	sin	cos	sin	ϵ, g'	cos	sin	cos	sin
0 0	+ 20″.33225		+ 1″.13909		2—2	—18″.168	+22″.119	—0″.560	+0″.145
1 0	— 2.67934	+ 0″.53078	— 3.76326	—0″.08626	3—2	+ 0.950	— 0.348	+0.651	—0.745
2 0	— 0.1569	— 0.0943	+ 0.1352	— 0.1189	4—2	+ 0.067	— 0.070	—0.019	+0.036
3 0	+ 0.018	— 0.008	+ 0.006	+ 0.009	5—2	— 0.004	+ 0.006	—0.003	+0.001
4 0		+ 0.001	— 0.001						
					—1—3	— 0.001	+ 0.005	+0.004	+0.002
—3—1	+ 0.002	— 0.001		— 0.002	0—3	— 0.0492	+ 0.0393	—0.049	+0.077
—2—1	— 0.001	+ 0.030	+ 0.022	+ 0.002	1—3	+ 0.2177	— 1.0880	—0.113	—0.678
—1—1	— 0.2524	+ 0.0122	— 0.183	+ 0.338	2—3	+ 2.3246	+ 5.2822	+1.881	+0.484
0—1	+ 0.6484	— 2.2577	— 0.975	— 2.108	3—3	—14.617	— 3.703	—0.191	—0.309
1—1	+ 3.9422	+ 8.9281	+ 0.042	+ 0.846	4—3	+ 0.369	+ 0.517	+0.457	+0.133
2—1	— 0.332	— 1.528	— 0.803	— 1.819	5—3	+ 0.060	+ 0.013	—0.020	—0.006
3—1	— 0.029	— 0.137	+ 0.066	+ 0.052	6—3	— 0.004	— 0.001	—0.001	—0.001
4—1	+ 0.008	+ 0.009	— 0.002	+ 0.005					
					0—4	— 0.0039	+ 0.0071	+0.001	+0.011
—2—2	+ 0.003	+ 0.003	+ 0.002	— 0.002	1—4	— 0.0555	— 0.1107	—0.079	—0.048
—1—2	— 0.027	+ 0.017	+ 0.016	+ 0.039	2—4	+ 0.8612	+ 0.1352	+0.411	—0.268
0—2	— 0.393	+ 0.031	— 0.553	+ 0.168	3—4	— 2.888	+ 2.743	+0.159	+0.939
1—2	+ 5.322	— 4.431	+ 2.331	— 2.902	4—4	— 1.406	— 7.338	+0.133	—0.168

Digitized by Google

ϵ, g'	$ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$ cos	$ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$ sin	$a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$ cos	$a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$ sin	ϵ, g'	$ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$ cos	$ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$ sin	$a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$ cos	$a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$ sin
5—4	—0.″215	+0.″308	+0.″033	+0.″221	8—6	—0.″011	—0.″004	+0.″001	+0.″002
6—4	+ 0.011	+ 0.035		—0.011	9—6	+ 0.001	+ 0.001		
7—4		—0.002							
					1—7	—0.000058	+0.000134	+0.0001	+0.0001
0—5		+0.001	+0.001	+0.001	2—7	—0.001242	—0.001053	—0.0014	—0.0001
1—5	—0.011	—0.005	—0.011	+0.003	3—7	+0.013125	—0.005233	+0.0045	—0.0086
2—5	+0.083	—0.078	+0.012	—0.080	4—7	—0.0129	+0.0855	+0.026	+0.032
3—5	+0.110	+0.702	+0.259	+0.166	5—7	—0.266	—0.215	—0.094	+0.027
4—5	—2.246	—1.018	—0.376	+0.247	6—7	+0.723	—0.301	+0.017	—0.092
5—5	+2.902	—2.092	+0.115	+0.034	7—7	—0.063	+0.769	—0.030	+0.016
6—5	—0.205	—0.048	—0.087	+0.056	8—7	+0.050	—0.031	+0.003	—0.021
7—5	—0.014	+0.015	+0.005	—0.001	9—7	—0.002	—0.007	—0.001	+0.001
8—5	+0.001								
					3—8	+0.001	—0.002		
0—6	+0.0001	+0.0001			4—8	+0.009	+0.010	+0.007	+0.001
1—6	—0.0012	+0.0004	—0.001	+0.001	5—8	—0.063	+0.014	—0.012	+0.023
2—6	—0.0005	—0.0137	—0.007	—0.008	6—8	+0.059	—0.205	—0.033	—0.040
3—6	+0.093	+0.050	+0.059	—0.016	7—8	+0.302	+0.285	+0.041	—0.009
4—6	—0.449	+0.252	—0.026	+0.176	8—8	—0.330	+0.120	—0.014	—0.011
5—6	+0.029	—1.423	—0.173	—0.114	9—8	+0.024	+0.017	+0.009	—0.003
6—6	+1.459	+0.822	+0.007	+0.064	10—8	+0.003	—0.003		
7—6	—0.019	—0.112	—0.040	—0.025					

§ 10.

Für die später auszuführenden Integrationen ist es am zweckmässigsten, statt der mittleren Anomalie des störenden Planeten das Verhältniss μ der mittleren Bewegungen und die mittleren Anomalien c und c′ für eine bestimmte Epoche einzuführen. Man hat also

$$F = \Sigma\Sigma((i,i',c))\cos(i\epsilon - i'g') + \Sigma\Sigma((i,i',s))\sin(i\epsilon - i'g') \text{ zu verwandeln in}$$
$$F = \Sigma\Sigma[i,i',c]\cos[(i-i'\mu)\epsilon - i'(c'-\mu c)] + \Sigma\Sigma[i,i',s]\sin[(i-i'\mu)\epsilon - i'(c'-\mu c)]$$

Die neue Form entsteht dadurch, dass man aus $g' = n't + c'$ die Zeit mittelst $nt + c = \epsilon - e\sin\epsilon$ eliminirt und $\sin\epsilon$ durch die J Function entwickelt. Sind z', y und π beziehungsweise die zu g', ϵ und $c' - \mu c$ gehörigen imaginären Exponentialfunctionen und ferner $\lambda = \frac{1}{2}\mu e$, so wird

$$z'^{-i'} = \pi^{-i'} y^{-i'\mu} h^{2i'\lambda\sin s\sqrt{-1}} = \pi^{-i'} \Sigma J^{m}_{i'\lambda} y^{m-i'\mu}$$

Die Substitution von $z'^{-i'}$ in die erste Form führt sogleich auf die Relation zwischen $[i, i', {}^{c}_{s}]$ und $((i, i', {}^{c}_{s}))$.

Da in der Form (I^a) § 2 nicht $a\Omega$, sondern $a\left(\frac{d\Omega}{d\epsilon}\right)$ auftritt, so wird die Verwandlung mit

$$(i)a\Omega = \Sigma\Sigma(i)(((i),i',c))\cos((i)\epsilon - i'g') + \Sigma\Sigma(i)(((i),i',s))\sin((i)\epsilon - i'g')$$

vorgenommen. Zunächst wurde mit $\log\frac{1}{2}\mu e = 8.236118$ eine neue Reihe J Functionen berechnet:

Digitized by Google

	i'=1	2	3	4	5	6	7	8	9
$J^0_{i'/2}-1$	6.47220_n	7.07417_n	7.42619_n	7.67584_n	7.86937_n	8.02738_n	8.16085_n	8.27635_n	8.37811_n
$J^1_{i'/2}$	8.23605	8.53689	8.71266	8.83715	8.93348	9.01195	9.07806	9.13508	9.18513
$J^2_{i'/2}$	6.1712	6.7731	7.12506	7.37464	7.56807	7.72596	7.85930	7.97463	8.07621
$J^3_{i'/2}$	3.930	4.833	5.3613	5.7359	6.0263	6.2635	6.4639	6.6374	6.7903
$J^4_{i'/2}$				3.97	4.36	4.67	4.943	5.175	5.379

Mit Hülfe dieser Tafel ergaben sich folgende Endwerthe der Störungsfunction und ihrer Differentialquotienten.

	(i) a Ω		$ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$		$a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$	
ε, με	cos	sin	cos	sin	cos	sin
0 0			+ 20″33225		+ 1″13909	
1 0	— 1″10943	+ 0″14902	— 2.67934	+ 0″53078	— 3.76326	— 0″08626
2 0	— 0.1113	— 0.0513	— 0.1569	— 0.0943	+ 0.1352	— 0.1189
3 0	+ 0.010	— 0.006	+ 0.018	— 0.008	+ 0.006	+ 0.009
4 0		+ 0.001		+ 0.002	— 0.001	
—3—1	— 0.001	+ 0.001	+ 0.002	— 0.002		— 0.002
—2—1	+ 0.002	— 0.014	+ 0.004	+ 0.030	+ 0.025	— 0.005
—1—1	+ 0.0915	— 0.0045	— 0.263	+ 0.053	— 0.166	+ 0.375
0—1	— 0.0185	— 0.0475	+ 0.5759	— 2.4109	— 0.979	— 2.116
1—1	+ 1.1651	+ 2.7640	+ 3.958	+ 8.912	+ 0.039	+ 0.841
2—1	+ 0.004	— 1.034	— 0.263	— 1.371	— 0.804	— 1.805
3—1	— 0.029	— 0.127	— 0.034	— 0.162	+ 0.053	+ 0.021
4—1	+ 0.005	+ 0.003	+ 0.008	+ 0.006	— 0.001	+ 0.006
—2—2	— 0.001	— 0.001	+ 0.004	+ 0.002	+ 0.002	— 0.003
—1—2	+ 0.008	— 0.004	— 0.011	+ 0.013	+ 0.037	+ 0.031
0—2	— 0.0865	+ 0.0855	— 0.567	+ 0.197	— 0.632	+ 0.269
1—2	+ 2.8001	— 2.8333	+ 5.929	— 5.187	+ 2.329	— 2.898
2—2	—16.433	+20.182	— 17.996	+21.952	— 0.501	+ 0.071
3—2	+ 0.271	+ 0.516	+ 0.324	+ 0.414	+ 0.633	— 0.742
4—2	+ 0.074	— 0.056	+ 0.089	— 0.069	+ 0.003	+ 0.011
5—2		+ 0.002	— 0.001	+ 0.003	— 0.003	+ 0.002
—1—3	+ 0.001	— 0.001	+ 0.002	+ 0.001	+ 0.007	— 0.003
0—3	— 0.0073	+ 0.0294	— 0.057	+ 0.103	— 0.040	+ 0.112
1—3	+ 0.1157	— 0.6836	+ 0.0751	— 1.3605	— 0.213	— 0.697
2—3	+ 1.2639	+ 4.4705	+ 3.084	+ 5.404	+ 1.881	+ 0.464
3—3	—13.661	— 3.187	— 14.477	— 3.449	— 0.117	— 0.291
4—3	— 0.413	+ 0.330	— 0.386	+ 0.331	+ 0.449	+ 0.118
5—3	+ 0.051	+ 0.032	+ 0.060	+ 0.035	+ 0.003	+ 0.001
0—4	+ 0.0016	+ 0.0041	+ 0.002	+ 0.015	+ 0.007	+ 0.013
1—4	— 0.0422	— 0.0659	— 0.1214	— 0.1121	— 0.106	— 0.026
2—4	+ 0.6217	+ 0.1585	+ 1.049	— 0.069	+ 0.393	— 0.335
3—4	— 2.697	+ 2.240	— 2.719	+ 3.244	+ 0.177	+ 0.928

Digitized by Google

$\epsilon, \mu\epsilon$	(i) $a\,\Omega$ cos	(i) $a\,\Omega$ sin	$a\,r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$ cos	$a\,r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$ sin	$a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$ cos	$a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$ sin
4—4	— 1″.553	— 6″.825	— 1″.581	— 7″.136	+ 0″.142	— 0″.118
5—4	— 0.320	— 0.197	— 0.318	— 0.193	+ 0.043	+ 0.212
6—4	— 0.008	+ 0.035	— 0.007	+ 0.039	+ 0.003	+ 0.004
0—5			+ 0.001	+ 0.001	+ 0.002	
1—5	— 0.007		— 0.018	+ 0.004	— 0.010	+ 0.011
2—5	+ 0.056	— 0.061	+ 0.063	— 0.142	— 0.012	— 0.092
3—5	+ 0.069	+ 0.593	+ 0.320	+ 0.770	+ 0.291	+ 0.137
4—5	— 2.038	— 0.970	— 2.470	— 0.771	— 0.361	+ 0.257
5—5	+ 2.605	— 2.105	+ 2.706	— 2.157	+ 0.090	+ 0.051
6—5	+ 0.037	— 0.232	+ 0.038	— 0.232	— 0.078	+ 0.060
7—5	— 0.020	+ 0.002	— 0.022	+ 0.003	— 0.002	+ 0.004
1—6		+ 0.001	— 0.001	+ 0.002	+ 0.001	+ 0.002
2—6	— 0.0034	— 0.0098	— 0.0125	— 0.0173	— 0.013	— 0.006
3—6	+ 0.080	+ 0.036	+ 0.138	+ 0.015	+ 0.059	— 0.035
4—6	— 0.400	+ 0.229	— 0.430	+ 0.405	— 0.002	+ 0.185
5—6	+ 0.004	— 1.329	— 0.167	— 1.467	— 0.174	— 0.101
6—6	+ 1.416	+ 0.653	+ 1.446	+ 0.680	— 0.007	+ 0.055
7—6	+ 0.132	— 0.035	+ 0.132	— 0.033	— 0.040	— 0.019
8—6	— 0.005	— 0.010	— 0.005	— 0.011	— 0.003	
1—7	— 0.00006	+ 0.00005	+ 0.00018	+ 0.00019	+ 0.0002	+ 0.0001
2—7	— 0.001260	— 0.000197	— 0.002786	+ 0.000283	— 0.00171	+ 0.00121
3—7	+ 0.00969	— 0.00711	+ 0.01234	— 0.01697	+ 0.0004	— 0.0121
4—7	— 0.0037	+ 0.0774	+ 0.0260	+ 0.1069	+ 0.037	+ 0.027
5—7	— 0.257	— 0.188	— 0.351	— 0.160	— 0.092	+ 0.041
6—7	+ 0.667	— 0.317	+ 0.688	— 0.414	+ 0.009	— 0.089
7—7	+ 0.022	+ 0.711	+ 0.017	+ 0.724	— 0.028	+ 0.008
8—7	+ 0.047	+ 0.058	+ 0.047	+ 0.060		— 0.020
9—7	+ 0.004	— 0.004	+ 0.004	— 0.005	— 0.001	— 0.001
3—8		— 0.002	— 0.001	— 0.003	— 0.002	— 0.001
4—8	+ 0.010	+ 0.007	+ 0.018	+ 0.005	+ 0.008	— 0.003
5—8	— 0.057	+ 0.021	— 0.066	+ 0.046	— 0.006	+ 0.028
6—8	+ 0.040	— 0.199	+ 0.005	— 0.237	— 0.040	— 0.035
7—8	+ 0.306	+ 0.247	+ 0.349	+ 0.235	+ 0.037	— 0.012
8—8	— 0.282	+ 0.152	— 0.285	+ 0.152	— 0.009	— 0.011
9—8	— 0.016	+ 0.034	— 0.019	+ 0.036	+ 0.008	— 0.004
10—8	+ 0.003	+ 0.003	+ 0.003	+ 0.001		
4—9	+ 0.002	— 0.001	+ 0.002	— 0.002		
5—9	— 0.002	+ 0.010	+ 0.001	+ 0.015		
6—9	— 0.030	— 0.030	— 0.046	— 0.030		
7—9	+ 0.117	— 0.033	+ 0.129	— 0.053		
8—9	— 0.034	+ 0.201	— 0.034	+ 0.213		
9—9	— 0.134	— 0.070	— 0.116	— 0.084		
10—9	— 0.018	— 0.016	— 0.019	+ 0.001		
11—9		— 0.001	— 0.001	+ 0.002		

Digitized by Google

Abschnitt III.

Berechnung der durch Saturn ausgeübten allgemeinen Störungen.

§ 11.

Die mittleren Elemente des Saturn für 1861.0 sind die folgenden:

Epoche 1861 Juni 17 0^h Berlin.

$$\begin{array}{lll} c' = & 63^0\,55'\,20''.1 & \\ \pi' = & 90\;\;27\;\;23.5 & \left.\right\} \text{Mittl. Aeq. } 1870.0 \\ \theta' = & 112\;\;32\;\;44.1 & \\ i' & 2\;\;29\;\;36.21 & \\ \varphi' & 3\;\;12\;\;43.90 & \\ a' & 9.538852 & m' = \dfrac{1}{3501.6} \\ n' & 120''.45477 & \end{array}$$

Ein kleiner Divisor tritt erst beim Argumente $1-9\mu$ auf (es ist $1-9\mu = -0.0422$) und braucht daher nicht berücksichtigt zu werden.

Zuerst berechnete ich wie oben die die gegenseitige Bahnlage bestimmenden Grössen

$$\Pi = 76^0\,18'\,14''.18 \quad \Pi' = 218^0\,54'\,28.74 \quad J = 6^0\,8'\,55''.38$$

Für die Berechnung der Saturnsstörungen verdient eine zweite Methode, welche Hansen in seiner Abhandlung „Entwickelung der negativen und ungeraden Potenzen von $(r^2+r'^2-2rr'H)$" giebt, den Vorzug. Dieselbe unterscheidet sich von der ersten darin, dass sowohl die Entwickelung nach den Bögen des störenden als auch nach denen des gestörten Planeten analytisch ausgeführt wird. Im Wesentlichen beruht diese Methode in der Darstellung von $\frac{r'}{\Delta}$ durch das Produkt von Binomen, deren Coefficienten durch die von Gauss behandelten Π Functionen ausgedrückt werden, sowie in der Summirung der vorkommenden hypergeometrischen Reihen durch dieselben Functionen.

Wir hatten gefunden $\Omega = \mu\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{r}{r'^2}H\right)$. Weil nun in den Formeln (III) § 4 nur Differentialquotienten von Ω nach den Coordinaten des gestörten Planeten vorkommen, so darf man auch schreiben $\Omega = \mu\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{r'} - \frac{r}{r'^2}H\right)$

(1) Setzt man $2\mu\left(\frac{a}{\Delta}\right) = \sum_0^\infty \Delta_n \left(\frac{r}{a}\right)^n \left(\frac{a'}{r'}\right)^{n+1}$, so wird

(I) $$2a\Omega = \Delta_2\left(\frac{r}{a}\right)^2\left(\frac{a'}{r'}\right)^3 + \Delta_3\left(\frac{r}{a}\right)^3\left(\frac{a'}{r'}\right)^4 + \Delta_4\left(\frac{r}{a}\right)^4\left(\frac{a'}{r'}\right)^5 + \ldots\ldots$$

Diese Form zeigt, dass zunächst Δ_n bestimmt und dann die Multiplication mit $\left(\frac{r}{a}\right)^n$ und $\left(\frac{a'}{r'}\right)^{n+1}$ ausgeführt werden muss. Die Addition sämmtlicher Glieder giebt dann $a\Omega$. Da r explicite vorkommt, so bekommt man auch $ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$.

In $\left(\frac{\Delta}{r'}\right)^2 = 1 + \left(\frac{r}{r'}\right)^2 - 2\left(\frac{r}{r'}\right)H$ wird der Werth von H (§ 4) eingesetzt, und ausserdem werden

Digitized by Google

die Sinus und Cosinus durch die imaginären Exponentialfunctionen ausgedrückt. Es sei

(a) $$\begin{cases} p = h^{[(\mathfrak{r}+\Pi)-(\mathfrak{r}'+\Pi')]\sqrt{-1}} & q = h^{[(\mathfrak{r}+\Pi)+(\mathfrak{r}'+\Pi')]\sqrt{-1}} \\ \alpha = \frac{r}{r'}\cos^2\tfrac{1}{2}J & \beta = \frac{r}{r'}\sin^2\tfrac{1}{2}J \end{cases}$$

Hierdurch wird $$\left(\frac{\Delta}{r'}\right)^2 = FF' - \alpha\beta\left(\sqrt{\frac{p}{q}} - \sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2.$$

wenn man $F = 1 - \alpha p - \beta q$, $F' = 1 - \frac{\alpha}{p} - \frac{\beta}{q}$ setzt.

Allgemein ist der u^{te} Binomialcoefficient der Potenz $-\frac{2m+1}{2}$ mit Hülfe der Π-Function bestimmt durch

(b) $$\frac{\Pi(2m+2u)\Pi(m)}{2^{2u}\Pi(m+u)\Pi(2m)\Pi(u)}.$$

Mit Rücksicht hierauf wird

(2) $$\frac{r'}{\Delta} = \sum_{u=0}^{u=\infty} \alpha^u\beta^u \frac{\Pi(2u)}{2^{2u}(\Pi(u))^2}(FF')^{-\frac{2u+1}{2}}\left(\sqrt{\frac{q}{p}} - \sqrt{\frac{p}{q}}\right)^{2u}.$$

Wendet man ebenfalls (b) auf $F^{-\frac{2u+1}{2}} = [1-(\alpha p+\beta q)]^{-\frac{2u+1}{2}}$ an, so erhält man

$$F^{-\frac{2u+1}{2}} = \sum_n \alpha^k\beta^l \frac{\Pi(2u+2n)\Pi(u)}{2^{2n}\Pi(u+n)\Pi(2u)\Pi(k)\Pi(l)} p^k q^l, \text{ wo } k+l=n \text{ ist.}$$

Durch Verwandlung von p in p^{-1} und q in q^{-1} bekommt man $F'^{-\frac{2u+1}{2}}$. Multiplicirt man beide mit einander und ordnet nach $\alpha^k\beta^l$, so wird

(3) $$(FF')^{-\frac{2u+1}{2}} = \Sigma M(k,l)\alpha^k\beta^l \text{ und } M(k,l) = \sum_{\tau=\sigma=0}^{\tau=k,\sigma=l} \frac{\Pi(2u+2v+2w)\Pi(2u+2\tau+2\sigma)(\Pi(u))^2 p^{k-2\tau} q^{l-2\sigma}}{2^{2u}\Pi(u+v+w)\Pi(u+\tau+\sigma)(\Pi(2u))^2\Pi(v)\Pi(w)\Pi(\tau)\Pi(\sigma)},$$

wenn man einführt

(α) $$n = k+l, \quad v = k-\tau, \quad w = l-\sigma.$$

Ferner ist

(4) $$\left(\sqrt{\frac{p}{q}} - \sqrt{\frac{q}{p}}\right)^{2u} = \sum_{\tau=0}^{\tau=u} \frac{\Pi(2u)}{\Pi(2\tau)\Pi(2u-2\tau)}\left(\frac{p}{q}\right)^{u-2\tau} - \sum_{\tau=0}^{\tau=u-1} \frac{\Pi 2u}{\Pi(2\tau)\Pi(2u-2\tau-1)}\left(\frac{p}{q}\right)^{u-2\tau-1}.$$

Durch Multiplication von (3) und (4) geht (2) über in

(5) $$\frac{r'}{\Delta} = \Sigma E(k,l)\alpha^k\beta^l, \text{ wo } E(k,l) = \Sigma G(\tau,\sigma)p^{k-2\tau}q^{l-2\sigma} - \Sigma H(\tau,\sigma)p^{k-2\tau-1}q^{l-2\sigma-1} \text{ ist.}$$

$G(\tau,\sigma)$ und $H(\tau,\sigma)$ sind noch zu bestimmen. Zu dem Ende wird (3) in (2) substituirt, und wegen des dort vorkommenden Factors $\alpha^u\beta^u$ wird in (3) k in $k-u$ und l in $l-u$ verwandelt. Die Multiplication mit den beiden Theilen der Gleichung (4) geben dann beziehungsweise $G(\tau,\sigma)$ und $H(\tau,\sigma)$ als Function von Π. Die Berechnung der G und H wird durch eine Umformung noch vereinfacht. Nimmt man aus beiden den von u unabhängigen Factor K und K' heraus, so wird $G(\tau,\sigma) = KT$, $H(\tau,\sigma) = K'T'$, und zwar lassen sich T und T' durch das Produkt zweier hypergeometrischen Reihen darstellen.

$$T = F\left(-v, -\sigma, \frac{1}{2}, 1\right)\cdot F\left(-w, -\tau, \frac{1}{2}, 1\right)$$

Digitized by Google

$$T' = 4v(\sigma+1)\,F\left(-v+1, -\sigma, \frac{3}{2}, 1\right)\cdot F\left(-w+1, -\tau, \frac{3}{2}, 1\right)$$

Diese lassen sich durch $F(-\alpha, -\beta, \gamma, 1) = \frac{\Pi(\alpha+\beta+\gamma-1)\,\Pi(\gamma-1)}{\Pi(\alpha+\gamma-1)\,\Pi(\gamma+\beta-1)}$ summiren.

Die gefundenen Π Functionen werden zerlegt und

$$\rho(z,z') = \frac{1.3.5\ldots.2(z+z')-1}{2.4.6\ldots2z.2.4.6\ldots2z'}, \quad \pi(z,z') = \frac{(2z+1)(2z+3)(2z+5)\ldots.2(z+z')-1}{1.3.5\ldots2z'-1} \text{ eingeführt.}$$

Substituirt man ferner statt p und q die zu $(f+\Pi)$ und $(f'+\Pi')$ gehörigen imaginären Exponentialfunctionen u und u' und nimmt Rücksicht auf (α), so wird der definitive Ausdruck von E(k,l):

(6) $$E(n-1,l) = \Sigma\rho(v,w)\rho(\tau,\sigma)\pi(w,\tau)\pi(v,\sigma)\,u^{n-2f}u'^{-(n-2f-2g)}$$
$$-\Sigma\frac{4v(\sigma+1)}{(2\sigma+1)(2\tau+1)}\rho(v,w-1)\rho(\tau,\sigma+1)\pi(w,\tau)\pi(v,\sigma)\,u^{n-2f-2}u'^{-(n-2f-2g)},$$

(β) in welchem $f=\tau+\sigma$, $g=l-2\sigma$, $v=n-l-\tau$, $w=l-\sigma$ ist.

In diesem Ausdrucke lassen sich die beiden Theile durch Gleichsetzen der Exponenten vereinigen. Vergleicht man jetzt (1) und (5) und berücksichtigt (a), so erhält man zur Bestimmung von Δ_n

(7) $$\Delta_n = 2\mu\left(\frac{a}{a'}\right)^{n+1}\Sigma E(n-l,)\cos^{2(n-l)}\frac{1}{2}J\sin^{2l}\frac{1}{2}J = \Sigma\Sigma\Gamma(n-2f, -(n-2f-2g))\,u^{n-2f}u'^{-(n-2f-2g)}$$

Die Summation erstreckt sich von $f=0$ bis $f=-n$, von $g=-f$ bis $g=n-f$. Da Δ reell ist und in Bezug auf u und u' symmetrisch ist, so muss

$$\Gamma(m,m') = \Gamma(-m,-m') \text{ und } \Gamma(m,m') = \Gamma(m',m) \text{ sein.}$$

In jedem Γ Coefficienten sind n, f, g constant, und daher kann man durch diese und die Variabele σ nach (β) v, w, τ und l eliminiren.

Es wird $v=n-f-g-\sigma$, $w=g+\sigma$, $\tau=f-\sigma$, $l=g+2\sigma$.

Schliesslich giebt die Combination von (6) und (7)

(8) $$\Gamma(n-2f, -(n-2f-2g)) = \gamma_n\,tg^{2g}\frac{1}{2}J\Sigma\left[P\,tg^{4\sigma}\frac{1}{2}J - Q\,tg^{4\sigma+2}\frac{1}{2}J\right], \text{ wo } \gamma_n = 2\mu\left(\frac{a}{a'}\right)^{n+1}\cos^{2n}\frac{1}{2}J.$$

P und Q sind Functionen von ρ und π und daher positive Zahlen, deren Werthe Hansen in einer Tafel gegeben hat. Durch die Formel (8) rechnete ich folgende Werthe der Γ, die ich logarithmisch ansetze.

	Δ_1				Δ_5						
1—1	0.5204648	1—1	8.83343	5—5	7.71071	4—4	6.76859	3—3	5.9820	2 0	4.313
1+1	7.98056	1+1	7.08013	5—3	5.8698	4—2	5.4137	3—1	4.878	0 0	5.2321
				5—1	3.63	4 0	3.400	1—1	5.9373		
	Δ_2		Δ_4	3—3	7.43502	2—2	6.6636	1+1	4.892		Δ_9
2—2	9.770054	4—4	8.381935	3—1	5.9897	2 0	5.4561			9—9	5.0860
2 0	7.53118	4—2	6.4441	3+1	3.85	2+2	3.466		Δ_8	9—7	3.500
2+2	4.690	4 0	4.080	1—1	7.35770	0 0	6.6371	8—8	5.7363	7—7	4.7681
0 0	9.588926	2—2	8.123654	1+1	6.0180			8—6	4.099	7—5	3.638
		2 0	6.5499				Δ_7	6—6	5.4268	5—5	4.6386
	Δ_3	2+2	4.234		Δ_6	7—7	6.3898	6—4	4.2355	5—3	3.697
3—3	9.065400	0 0	8.072754	6—6	7.04744	7—5	4.695	4—4	5.3077	3—3	4.5697
3—1	7.00262			6—4	5.2857	5—5	6.0900	4—2	4.291	3—1	3.724
3+1	4.4627			6—2	3.14	5—3	4.828	2—2	5.2494	1—1	4.5379
										1+1	3.732

Digitized by Google

Durch diese Rechnung sind die Δ_n als Function von $(f+\Pi)$ und $(f'+\Pi')$ ausgedrückt. Sind x und x' die zur wahren Anomalie gehörigen imaginären Exponentialfunctionen, so wird

$$\Delta_n = \Sigma\{A(n-2f, -(n-2f-2g)) + \sqrt{-1}\,B(n-2f, -(n-2f-2g))\}\, x^{n-2f} x'^{-(n-2f-2g)}$$

und $$A(i, -i') = \Gamma(i, -i')\cos(i\Pi - i'\Pi'), \quad B(i, -i') = \Gamma(i, -i')\sin(i\Pi - i'\Pi').$$

Die Coefficienten A und B giebt die folgende Tafel.

i, i'	A	B	i, i'	A	B	i, i'	A	B	i, i'	A	B
	Δ_1						Δ_6				
1—1	0.4205355_n	0.3038821_n	2—4	6.44348	5.1664_n	6—6	6.90161_n	6.89214_n	3—5	4.745_n	4.580_n
1+1	7.60994	7.93709_n	2—2	7.54249	8.108172	6—4	5.0122	5.2132_n	3—3	5.5591	5.9486_n
			2 0	6.49824_n	6.21272				3—1	4.871	4.118
	Δ_2		2+2	4.038_n	4.121_n	4—6	4.7811	5.2633			
2—2	9.188895	9.754572				4—4	6.69428_n	6.46298	1—3	4.760_n	4.690
2 0	7.47953_n	7.19401	0—4	4.040_n	3.696_n	4—2	5.2442_n	5.2806_n	1—1	5.8374_n	5.7207_n
2+2	4.494_n	4.577_n	0—2	5.8743	6.54000_n	4 0	3.20	3.30_n	1+1	4.521	4.848_n
			0 0	8.072754							
0—2	6.85557	7.52129_n	0+2	5.8743	6.54000	2—4	5.4131	4.136_n		Δ_8	
0 0	9.588926		0+4	4.040_n	3.696	2—2	6.08243	6.64811	8—8	5.4241	5.6774_n
0+2	6.85557	7.52129				2 0	5.4044_n	5.1189	8—6	4.080	3.56
				Δ_5		2+2	3.27_n	3.36_n			
	Δ_3		5—5	7.70748	6.79535				6—8	4.020_n	3.84
3—3	8.642483	9.031988_n	5—3	4.8274	5.8680	0—4	3.30_n	3.00_n	6—6	5.2810	5.2715_n
3—1	6.99597	6.24245	5—1	3.60_n	3.10	0—2	4.780	5.4462_n	6—4	3.96	4.162_n
3+1	3.04	4.462				0 0	6.6371				
			3—5	5.7865_n	5.6215_n	0+2	4.780	5.4462	4—6	3.73	4.213
1—3	6.88418_n	6.81445	3—3	7.01210	7.40161_n	0+4	3.30_n	3.00	4—4	5.2434_n	5.0121
1—1	8.733505	8.616851_n	3—1	5.9830	5.2295				4—2	4.121_n	4.158_n
1+1	6.70950	7.03665_n	3+1		3.85		Δ_7				
1+3	4.451	3.82							2—4	4.291	
			1—5	3.30	3.50	7—7	5.5455	6.3853	2—2	4.668	5.2339
	Δ_4		1—3	5.8712_n	5.8015	7—5	4.667_n	4.237	2 0	4.261_n	3.98
4—4	8.317629_n	8.086325	1—1	7.25777_n	7.14112_n	5—7	4.211	4.670_n	0—2	3.64	4.305_n
4—3	6.27460_n	6.31102_n	1+1	5.6473	5.9745_n	5—5	6.0868	5.1746	0 0	5.2321	
3 0	3.841	3.992_n	1+3	3.84	3.20	5—3	3.78	4.826	0+2	3.64	4.305

§ 12.

Die einzelnen Glieder von Δ_n sind mit den ganzen Potenzen von x' multiplicirt, und im Ausdrucke der Störungsfunction (I) § 11 tritt Δ_n mit $\left(\frac{a'}{r'}\right)^{n+1}$ multiplicirt auf. Um daher diesen Ausdruck wie bei der ersten Methode nach der mittleren Anomalie des störenden Planeten fortschreiten zu lassen, muss $\left(\frac{a'}{r'}\right)^{n+1} x'^m$ nach z' entwickelt werden. Man setzt

$$\left(\frac{r'}{a'}\right)^n x'^m = \sum_{-\infty}^{+\infty} X_i^{n,m} z'^i, \text{ mithin } X_i^{n,m} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{h^{-\pi\sqrt{-1}}}^{h^{+\pi\sqrt{-1}}} \left(\frac{r'}{a'}\right)^n x'^m z'^{-i-1}\, dz$$

Digitized by Google

Macht man die Grösse unter dem Integralzeichen vermittelst der Gleichungen zwischen $\frac{r'}{a'}$, f', g' und ϵ' zur Function von ϵ' oder y', so erscheint X unter dieser Form

$$X_i^{n,m} = \frac{\cos^{2(n+1)} \frac{1}{2}\varphi'}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{h^{-\pi\sqrt{-1}}}^{h^{+\pi\sqrt{-1}}} y'^{m-i-1} \left[(1-\beta' y')^{n-m+1} h^{\nu'\beta' y'}\right] \left[(1-\beta' y'^{-1})^{n+m+1} h^{-\nu'\beta' y'^{-1}}\right] dy',$$

wenn $\beta' = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi'$, $\nu' = i \cos^2 \frac{1}{2}\varphi'$ ist.

Die Grösse unter dem Integral wird also gleich gesetzt werden können

$$\sum_0^\infty (-1)^p y'^{m-i+p-1} (P_p \beta'^p + P_{p+1} Q_1 \beta'^{p+2} + \ldots) + \sum_1^\infty (-1)^q y'^{m-i-q-1} (Q_q \beta'^q + Q_{q+1} P_1 \beta^{q+2} + \ldots),$$

wo P_n und Q_n endliche nach Potenzen von ν' fortschreitende Reihen sind. Mit Rücksicht auf $\int y^p dy = 0$ und $\int \frac{dy}{y} = 2\pi\sqrt{-1}$ für die obigen Grenzen bleiben in dem Ausdruck von $X_i^{n,m}$ nur die Glieder bestehen, in welchen $p = i - m$ oder, wenn $m - i$ positiv ist, $q = m - i$ ist. Mit der Excentricität des Saturn erhielt ich folgende logarithmischen Werthe der X-Coefficienten.

n m	z'^0	z'^{-1}	z'^{-2}	z'^{-3}	z'^{-4}	z'^{-5}
—1 0	0.000000	8.447256	7.19542	5.9947		
—2—1	—∞	9.999318	9.048463	8.02381	6.9706	5.901
—2+1	—∞	6.59427	5.4675	4.318		
—3—2	—∞	8.447256_n	9.996580	9.289526	8.42325	7.4877
—3 0	0.002047	8.926082	7.85015	6.7661	5.6767	4.582
—3+2	—∞	4.535				
—4—3	—∞	6.59405	8.746750_n	9.991768	9.441412	8.69212
—4—1	8.751867	0.002732	9.226831	8.31860	7.3537	6.3569
—4+1	8.751867	7.63825	6.5305	5.4244	4.318	
—5—4	—∞	4.5648_n	7.19497	8.920278_n	9.984848	9.551300
—5—2	7.37674	8.453049	0.001377	9.401620	8.61836	7.7506
—5 0	0.006899	9.151002	8.19940	7.2054	6.1872	5.153
—5+2	7.37674	6.2588	5.1420	4.030		
—6—5	—∞		5.4669_n	7.54534	9.04162_n	9.97576
—6—3	5.9505	7.07732	6.4246	9.99798	9.52422	8.83907
—6—1	9.05665	0.008865	9.35547	8.53671	7.6428	6.7047
—6+1	9.05665	8.06228	7.0406	6.0021	4.952	
—6+3	5.9505	4.832				
—7—6	—∞			5.994_n	7.7927	9.1339_n
—7—4	4.50	5.613	6.900	8.4442_n	9.99248	9.6178
—7—2	7.9030	8.9337	0.00889	9.4931	8.7782	7.9678
—7 0	0.01428	9.3016	8.4458	7.5254	6.567	5.584
—7+2	7.9030	6.857	5.801	4.74		
—7+4	4.50					

Digitized by Google

—8—7	—∞				6.367_n	7.983
—8—5			5.18	7.072	8.742_n	9.9849
—8—3	6.653	7.718	8.760	0.0069	9.5961	8.966
—8—1	9.2377	0.0177	9.4573	8.712	7.878	6.991
—8+1	9.2377	8.344	7.397	6.419	5.42	
—8+3	6.653	5.58				

Führt man in

$$\left(\frac{a'}{r'}\right)^{n+1} \Delta_n = \Sigma A\,(m, -(m-2g))\, x^m \left[\left(\frac{a'}{r'}\right)^{n+1} x'^{m-2g}\right] + \sqrt{-1}\,\Sigma B\,(m, -(m-2g))\, x^m \left[\left(\frac{a'}{r'}\right)^{n+1} x'^{m-2g}\right]$$

den Werth von $\left(\frac{r'}{a'}\right)^{-n} x'^m = \Sigma X_{-i'}^{-n,\,m}\, z'^{-i'}$ ein, so erhält man

$$\left(\frac{a'}{r'}\right)^{n+1} \Delta_n = \sum_{m=-n}^{m=+n} x^m \sum_0^\infty \left[E_{-i'}^{n,m} + \sqrt{-1}\, F_{-i'}^{n,m}\right] z'^{-i'}$$

Vermittelst der Tafel der X rechnete ich die E und F Coefficienten, nämlich:

	z'^0		z'^{-1}		z'^{-2}		z'^{-3}		z'^{-4}		z'^{-5}	
m	E	F	E	F	E	F	E	F	E	F	E	F
	Δ_1		Δ_1		Δ_1		Δ_1		Δ_1		Δ_1	
1	—∞	—∞	0.41985_n	0.30320_n	9.46900_n	9.35234_n	8.44435_n	8.32770_n	7.3912_n	7.2745_n	6.322_n	3.205_n
—1			7.4819	7.9744	6.5775	7.0110	5.374	5.380	4.53	4.92	3.5	6.85
	Δ_2		Δ_2		Δ_2		Δ_2		Δ_2		Δ_2	
2	7.48157_n	7.19605	7.66097_n	8.19821_n	9.185420	9.751165	8.47839	9.04410	7.61213	8.17782	6.6759	7.24157
0	9.590972		8.51474	5.968	7.53868	7.51787_n	6.5632	6.8106_n	5.572	5.944_n	4.56	5.008_n
—2	7.48157_n	7.19605_n	6.4043_n	6.1270_n	5.387_n	4.88_n	4.37_n	3.25_n	3.35_n			
	Δ_3		Δ_3		Δ_3		Δ_3		Δ_3		Δ_3	
3	5.748	5.001	7.00614	6.1259	7.35857_n	7.78086	8.63447	9.02375_n	8.08397	8.47339_n	7.33454	7.72411_n
1	7.48124_n	7.37999_n	8.73623_n	8.61963_n	7.95829_n	7.84596_n	7.27411_n	6.3447_n	6.5232_n	5.9388	5.698_n	5.356
—1	7.48124_n	7.37999	6.4477	7.10539	5.831	6.2953	5.079	5.346	4.26	4.37	3.4	3.4
—3	5.748	5.001_n	4.64	4.57_n	3.55	3.74_n						
	Δ_4		Δ_4		Δ_4		Δ_4		Δ_4		Δ_4	
4	3.41	4.171	4.71_n	4.78_n	6.3450_n	6.2700_n	7.22582	7.02813_n	8.30266_n	8.07088	7.86898_n	7.63750_n
2	6.4937_n	6.2930	5.735	6.5877	7.54331	8.109635	6.9323	7.50999	6.6157	6.7144	6.0732	5.8255
0	8.079660		7.22431	4.990_n	6.4184	6.5414_n	5.579	5.941_n	4.59	5.172_n	3.3	4.33_n
—2	6.4937_n	6.2930_n	5.643_n	5.405_n	4.78_n	4.03	3.9_n		3.0_n			
—4	3.41	4.171		3.3								
	Δ_5		Δ_5		Δ_5		Δ_5		Δ_5		Δ_5	
5			3.6_n	3.3			5.390	5.8787	6.7471_n	5.643_n	7.68331	6.7749
3	5.043	4.283	5.997	5.155	5.344	4.50	7.01139	7.39951_n	6.5450	6.9232_n	5.117	6.3292_n
1	6.3034_n	6.2262_n	7.26653_n	7.15029_n	6.6132_n	6.4967_n	6.1343_n	5.189	5.516_n	5.179	4.77_n	4.60
—1	6.3034_n	6.2262_n	5.388	6.0500	4.907	5.359	4.31	4.51	3.6	3.7		
—3	5.043	4.283	4.05	4.0_n	3.0	3.2_n						
	Δ_6		Δ_6		Δ_6		Δ_6		Δ_6		Δ_6	
6							3.56_n	3.57	4.71	5.320_n	6.0520	5.9971
4			4.18_n	4.21_n	5.262_n	5.284_n	4.915	5.145_n	6.6877_n	6.4539	6.3139_n	6.0708
2	5.402_n	5.234	4.72	5.610	6.0888	6.6573	5.568	6.1412	5.514	5.403	5.074_n	4.55
0	6.6513		5.941	4.38_n	5.261	5.455_n	4.52	4.939_n	3.6	4.20_n		3.34_n
—2	5.402_n	5.234_n	4.70_n	4.47_n	3.95_n	3.1_n	3.15_n					

Digitized by Google

	Δ_7		Δ_7		Δ_7		Δ_7		Δ_7		Δ_7	
7									3.4	3.2_n	4.62_n	4.60
5						3.6	3.89	4.834	4.813_n	4.26	6.0719	5.178
3	4.109	3.35	4.900	3.95	4.625	4.675_n	5.570	5.9552_n	5.164	5.542_n	4.31_n	5.075_n
1	5.054_n	5.013_n	5.8550_n	5.738_n	5.302_n	5.170_n	4.972_n	4.36	4.44	4.18	3.78_n	3.60
—1	5.054_n	5.013	4.29	4.930	3.9	4.33	3.2	3.6				
—3	4.109	3.35_n										
	Δ_8		Δ_8		Δ_8		Δ_8		Δ_8		Δ_8	
6									3.90	4.18_n	4.30	3.93
4			3.3_n	3.3_n	4.15_n	4.17_n	4.00_n	3.4_n	5.249_n	5.010	4.924_n	4.67
2	4.27_n	4.11	3.3	4.43	4.68	5.254	4.24	4.805	4.37	4.15	3.99	3.39
0	5.256		4.65	3.5_n	4.08	4.32_n	3.4	3.87_n		3.2_n		
—2	4.27_n	4.11_n	3.7_n	3.4_n								

§ 13.

Es bleibt nun noch die letzte Operation übrig, durch welche die Functionen von r und x, die in $\left(\frac{r}{a}\right)^n\left(\frac{a'}{r'}\right)^{n+1}\Delta_n$ enthalten sind, in Function der zur excentrischen Anomalie ϵ des gestörten Planeten gehörenden imaginären Exponentialfunction y verwandelt werden. Man setze

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n x^m = \sum_{-n}^{+n} W_i^{n,m} y^i$$

Die Relationen $\frac{r}{a} = \cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\left(1+\beta^2-\beta\left(y+\frac{1}{y}\right)\right)$ und $x = \frac{y-\beta}{1-\beta y}$ geben ein Mittel zur Bestimmung der W. Aus beiden folgt $\left(\frac{r}{a}\right)^{n+1} x^{m-1} = \cos^2\frac{1}{2}\varphi\left(\frac{1}{y}-2\beta+\beta^2 y\right)\left(\frac{r}{a}\right)^n x^m$ und weiterhin

$$W_i^{n+1,m-1} = \cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\, W_{i+1}^{n,m} - 2\beta\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\, W_i^{n,m} + \beta^2\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\, W_{i-1}^{n,m}$$

$$W_i^{n+1,m-1} = \cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\, W_{i-1}^{n,m} - 2\beta\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\, W_i^{n,m} + \beta^2\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\, W_{i+1}^{n,m}$$

Entwickelt man $\left(\frac{r}{a}\right)^n x^n = \cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\, y^n (1-\beta y^{-1})^{2n}$, so bestimmen sich die $W_i^{n,n}$ folgender Maassen

$$W_n^{n,n} = \cos^{2n}\tfrac{1}{2}\varphi,\quad W_{n-1}^{n,n} = -\frac{2n}{1}\beta W_{n-2}^{n,n},\quad W_{n-2}^{n,n} = -\frac{2n-1}{2}\beta W_{n-1}^{n,n}$$

Vermittelst dieser drei Systeme wurden die W Coefficienten gerechnet.

n, m	y^0	y^1	y^2	y^3	y^4	y^5	y^6	y^7
1+1	9.078385_n	9.998434						
1—1	9.078385_n	7.5562						
2+2	8.33286	9.37785_n	9.996868					
2 0	0.003104	9.078385_n	7.55471					
2—2	8.33286	6.9357_n	5.112					

Digitized by Google

3+3	7.6331_n	8.72923	9.55237_n	9.995301				
3+1	9.38097_n	0.00771	9.07838_n	7.5531				
3—1	9.38097_n	8.3334	6.935_n	5.12				
3—3	7.633_n	6.29						
4+4	6.954	8.0787_n	8.99873	9.67573_n	9.99373			
4+2	8.7318	9.55858_n	0.01225	9.07837_n	7.5516			
4 0	0.01833	9.38406_n	8.3339	6.934_n	5.10			
4—2	8.7318	7.6339_n	6.287					
4—4	6.954	5.64_n						
5+5		7.430	8.4081_n	9.20322	9.77109_n	9.99217		
5+3	8.0810_n	9.0034	9.68507_n	0.01672	9.0783_n	7.550		
5+1	9.56475_n	0.02875	9.38713_n	8.3344	6.93_n			
5—1	9.56475_n	8.7344	7.634_n	6.28				
5—3	8.0810_n	6.96						
6+6			7.80	8.670_n	9.368	9.8487_n	9.9906	
6+4	7.43	8.412_n	9.2100	9.7835_n	0.0211	9.078_n	7.55	
6+2	9.0081	9.6943_n	0.0390	9.3902_n	8.335	6.93_n		
6 0	0.0448	9.5709_n	8.737	7.635_n	6.28			
6—2	9.0081	8.083_n	6.97					
6—4	7.43							
7+7					8.89_n	9.506	9.914_n	9.989
7+5			8.67_n	9.377	9.864_n	0.025	9.078_n	
7+3	8.42_n	9.217	9.796_n	0.0490	9.393_n	8.33		
7+1	9.703_n	0.0605	9.577_n	8.739	7.64_n			
7—1	9.703_n	9.013	8.086_n					
7—3	8.42_n	7.43						
8+6				8.89_n	9.52	9.93_n	0.030	9.08_n
8+4	7.81	8.68_n	9.386	9.879_n	0.059	9.396_n	8.34	
8+2	9.223	9.808_n	0.076	9.583_n	8.74			
8 0	0.081	9.712_n	9.017	8.09_n				
8—2	9.223	8.42_n						
8—4	7.81							

Die Anwendung dieser W Coefficienten ist analog der der X. Durch Multiplication mit $\left(\frac{r}{a}\right)^n$ wird folgende Relation aus der Form des vorigen Paragraphen erhalten

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n\left(\frac{a'}{r'}\right)^{n+1}\Delta_n=\sum_0^\infty z'^{-i'}\sum_{i=-n}^{i=+n}\left\{\sum_{-n}^{+n}\left(E^{n,m}_{-i'}+\sqrt{-1}\,F^{n,m}_{-i'}\right)W^{n,m}_i\right\}y^i \text{ oder}$$

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n\left(\frac{a'}{r'}\right)^{n+1}\Delta_n=\sum_0^\infty\sum_0^n\left(G^n_{i,-i'}+\sqrt{-1}\,H^n_{i,-i'}\right)y^i z'^{-i'}+\sum_0^\infty\sum_1^n\left(G^n_{-i,-i'}+\sqrt{-1}\,H^n_{-i,-i'}\right)y^{-i} z'^{-i'}$$

Das Bildungsgesetz der G und H ergiebt sich aus der Vergleichung beider Ausdrücke. Setzt man schliesslich das Gefundene in (I) § 11 ein, so erhält man

$$2a\Omega=\Sigma\Sigma\left[K(i,-i')+\sqrt{-1}\,L(i,-i')\right]y^i z'^{-i'}$$

$$2ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)=\Sigma\Sigma\left[M(i,-i')+\sqrt{-1}\,N(i,-i')\right]y^i z'^{-i'},$$

in welchen $K(i,-i')=G^2_{i,-i'}+G^3_{i,-i'}+G^4_{i,-i'}+\ldots,\quad L(i,-i')=H^2_{i,-i'}+H^3_{i,-i'}+H^4_{i,-i'}+\ldots,$

$M(i,-i')=2G^2_{i,-i'}+3G^3_{i,-i'}+4G^4_{i,-i'}+\ldots,\quad N(i,-i')=2H^2_{i,-i'}+3H^3_{i,-i'}+4H^4_{i,-i'}+\ldots$ ist.

Digitized by Google

§ 14.

Zur Bestimmung von $a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$ benutzt man die Relationen (III) § 4, indem man $\mu\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3$ eliminirt.

$$a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)=\left\{a\Omega+2ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)+3\left(\frac{r}{a}\right)\left(\frac{a'}{r'}\right)^2\Delta_1+\mu\,\mathfrak{v}^3\left(\frac{r}{a}\right)^2\left(\frac{a'}{r'}\right)^3\right\}(Z),$$

$$\text{wo } (Z)=-\frac{\mathfrak{v}\sin J\left(\frac{a'}{r'}\right)\sin(f'+\Pi')}{1-\mathfrak{v}^2\left(\frac{r}{a}\right)^2\left(\frac{a'}{r'}\right)^2} \quad \text{und} \quad \mathfrak{v}=\frac{a}{a'} \quad \text{ist.}$$

Die Entwickelung der Klammergrösse ist im Vorhergehenden enthalten. Zur Bestimmung von (Z) hat man zunächst

$$(Z)=-\sin J\left(\mathfrak{v}\left(\frac{a'}{r'}\right)+\mathfrak{v}^3\left(\frac{a'}{r'}\right)^3\left(\frac{r}{a}\right)^2+\mathfrak{v}^5\left(\frac{a'}{r'}\right)^5\left(\frac{r}{a}\right)^4+\ldots\right)\sin(f'+\Pi')$$

Löst man $\sin(f'+\Pi')$ auf, so tritt $\left(\frac{a'}{r'}\right)^n$ mit $\sin f'$ und $\cos f'$ multiplicirt auf, welches Produkt sich nach den Formeln des § 12 bestimmen lässt.

Die Logarithmen dieser Grössen fanden sich, wie folgt:

$\left(\frac{a'}{r'}\right)^n \sin f'$	$\cos 0g'$	$2\cos g'$	$2\cos 2g'$	$2\cos 3g'$	$2\cos 4g'$	$\left(\frac{a'}{r'}\right)^n \sin f'$	$2\sin g'$	$2\sin 2g'$	$2\sin 3g'$	$2\sin 4g'$
n = 1	8.44777_n	9.697434	8.62185	7.5213	6.413	n = 1	9.697777	8.62200	7.5214	6.413
3	8.4494	9.700507	8.84573	7.8836	6.877	3	9.69880	8.84487	7.8830	6.877
5	8.9297	9.70764	8.99585	8.1343	7.206	5	9.70119	8.99299	8.1326	7.205
7	9.1559	9.71874	9.1108	8.3290	7.466	7	9.7049	9.1051	8.3256	7.463
9	9.3078	9.7336	9.2056	8.4896	7.682	6	9.7100	9.1960	8.4844	7.678

Die mechanische Multiplication dieser Grössen mit den im Vorhergehenden enthaltenen $\left(\frac{r}{a}\right)^{2m}$ giebt nach Vorschrift der letzten Form (Z). Diese Grösse sowie die zwei letzten Glieder des Klammerausdrucks theile ich hier mit:

	$\frac{1}{2}(Z)$			$3\left(\frac{r}{a}\right)\left(\frac{a'}{r'}\right)^2\Delta_1$			$\mu\,\mathfrak{v}^2\left(\frac{r}{a}\right)^2\left(\frac{a'}{r'}\right)^3$
ϵ, g'	cos	sin	ϵ, g'	cos	sin	ϵ, g'	cos
0 0	−0″.000417		−1 −1	−0″.0193	−0″.0065	0 0	+1″.59836
1 0	−0.000004		0 −1	+0.9437	−0.7188	1 0	−0.19009
			+1 −1	−7.8597	+6.0083	2 0	+0.0057
0 −1	+0.008447	−0″.010471					
±1 −1	−0.000061	+0.000075	−1 −2	−0.0020	−0.0006	0 −1	+0.1341
±2 −1	+0.000002	−0.000003	0 −2	+0.1056	−0.0805	±1 −1	−0.0159
			+1 −2	−0.8797	+0.6724	±2 −1	+0.0005
0 −2	+0.000738	−0.000915					
±1 −2	−0.000009	+0.000011	−1 −3	−0.0002	−0.0001	0 −2	+0.0112
			0 −3	+0.0100	−0.0076	±1 −2	−0.0013
0 −3	+0.000061	−0.000075	+1 −3	−0.0831	+0.0635		
±1 −3	−0.000001	+0.000001				0 −3	+0.0009
			0 −4	+0.0009	−0.0007	±1 −3	−0.0001
0 −4	+0.000005	−0.000006	1 −4	−0.0073	+0.0056		
						0 −4	+0.0001

Digitized by Google

Durch die mechanische Multiplication der Klammergrösse mit (Z) wurde endlich $a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$ ermittelt.

§ 15.

Die gefundenen Reihen für $a\Omega$, $ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$, $a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$ wurden nun nach den Formeln des § 10 auf die Form $(i - i'\mu)\epsilon - i'(c' - c\mu)$ gebracht.

Mit $\log \lambda = 7.84108$ rechnete ich folgende Werthe der J-Function:

i'	$J^0_{i'\lambda} - 1$	$J^1_{i'\lambda}$	$J^2_{i'\lambda}$
1	5.682_n	7.8411	5.381
2	6.284_n	8.1421	5.983
3	6.636_n	8.3181	6.335
4	6.886_n	8.4430	6.585
5	7.080_n	8.5398	6.779

und mit diesen:

	(i) $a\Omega$		$ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$		$a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$	
ϵ, $\mu\epsilon$	cos	sin	cos	sin	cos	sin
0 0			+0″84347		+0″04052	
1 0	—0″05232	+0″00302	— 0.11479	+0″00918	— 0.13900	—0″3288
2 0	— 0.0026	— 0.0042	— 0.0022	— 0.0051	+ 0.0042	— 0.0007
3 0	+ 0.0003	+ 0.0001				
—2—1				+ 0.001		
—1—1	+ 0.0052	+ 0.0005	— 0.0133	— 0.0013	— 0.017	+ 0.008
0—1	+ 0.00046	— 0.00028	+ 0.1171	— 0.0322	+ 0.036	— 0.038
1—1	— 0.0608	+ 0.0402	— 0.1834	+ 0.1279	— 0.026	+ 0.003
2—1	+ 0.004	+ 0.020	+ 0.011	+ 0.014	+ 0.038	— 0.017
3—1	+ 0.003		+ 0.003			
—1—2	+ 0.0008		— 0.002		— 0.002	+ 0.002
0—2	+ 0.0007	— 0.0021	+ 0.0245	— 0.0289	+ 0.006	— 0.027
1—2	— 0.0526	+ 0.1620	— 0.114	+ 0.326	— 0.008	+ 0.141
2—2	+ 0.315	— 1.142	+ 0.324	— 1.167	+ 0.010	— 0.004
3—2	— 0.003	— 0.029	— 0.004	— 0.028	— 0.005	+ 0.010
4—2	— 0.001		— 0.001			
0—3	+ 0.0002	— 0.0008	+ 0.0037	— 0.0071		— 0.006
1—3	— 0.0078	+ 0.0401	— 0.0152	+ 0.0838	+ 0.005	+ 0.037
2—3	+ 0.028	— 0.310	+ 0.013	— 0.358	— 0.022	— 0.034
3—3	+ 0.129	+ 0.315	+ 0.130	+ 0.319	— 0.002	+ 0.004
4—3	+ 0.009	+ 0.010	+ 0.008	+ 0.010	— 0.001	— 0.003
0—4		— 0.0002	+ 0.0005	— 0.0013		
1—4	— 0.0004	+ 0.0071	— 0.0003	+ 0.0154	+ 0.002	+ 0.007
2—4	— 0.006	— 0.058	— 0.014	— 0.074	— 0.011	— 0.011
3—4	+ 0.068	+ 0.108	+ 0.079	+ 0.116	+ 0.010	+ 0.004
4—4	— 0.078	— 0.045	— 0.079	— 0.045		— 0.001
5—4	— 0.005	— 0.001	— 0.005	— 0.001		

Digitized by Google

1—5	+ 0.0001	+ 0.0011	+ 0.0004	+ 0.0025
2—5	— 0.003	— 0.009	— 0.005	— 0.013
3—5	+ 0.021	+ 0.023	+ 0.027	+ 0.025
4—5	— 0.042	— 0.015	— 0.045	— 0.015
5—5	+ 0.023	— 0.004	+ 0.023	— 0.004
6—5	+ 0.001	— 0.001	+ 0.001	— 0.001

Abschnitt IV.

Entwickelung der durch Mars und Erde bewirkten allgemeinen Störungen.

§ 16.

Die den Rechnungen zu Grunde gelegten Elemente des Mars und der Erde entnahm ich dem VI. bezw. IV. Bande der Pariser Annalen, die Massen sind die im Berliner astr. Jahrbuche angegebenen.

Epoche 1861 Juni 17 0^h Berlin.

♂			♁		
c'	143° 23' 15"		c'	165° 7' 49"	
π'	333 37 34. 5	Mittl. Aeq. 1870.0	π'	100 40 12.3	
θ'	48 34 43. 3				
i'	1 51 4. 5				
φ'	5 21 6. 66		φ'	0 57 38.48	
a'	1.5236913	$m' = \frac{1}{2680337}$ *)	a'	1.000000	$m' = \frac{1}{355499}$ *)
n'	1886".5183		n'	59' 8".1929	

Die relative Bahnlage ist bestimmt durch

Π = 94° 53' 11".54	Π = 100° 9' 38".7
Π' = 120 34 27.16	Π' = 252 51 40.6
J = 7 9 32.51	J = 5 23 52.9

Für Mars- und Erdstörungen wandte ich mit einer kleinen Abänderung die Methode des Abschnitts II an. Es ergaben sich zunächst:

K	= 120° 46' 15".4	log k 9.997486	K	= 252° 47' 21".7	log k 9.998237
K'	120 22 41.6	— k' 9.999126	K'	252 55 58.3	— k' 9.999833
W	113 14 13.3	— w 0.124021	W	91 27 37.7	— w 9.943853
W'	113 31 0.0	— w' 0.124854	W'	91 33 6.1	— w' 9.942525
P	220 56 7.4	— p 9.881528	P	115 47 37.2	— p 9.967326
V	334 10 35.0	— v 0.123951	V	207 15 31.2	— v 9.942508
R	1.444245	— γ_2 7.59474	R	1.194629	— γ_2 5.73833

Die oben (§ 5) aufgestellte Form $\left(\frac{\Delta}{a}\right)^2 = \gamma_0 - \gamma_1 \cos \epsilon' - \beta_0 \sin \epsilon' + \gamma_2 \cos^2 \epsilon'$ lässt sich darstellen durch $\left(\frac{\Delta}{a}\right)^2 = [C - q \cos(\epsilon' - Q)]\,[1 - q_1 \cos(\epsilon' + Q)]$. Multiplicirt man aus und vergleicht, so

*) Für die Anwendung der Arbeit werde ich die Endresultate nach besseren Massen reduciren.

Digitized by Google

erhält man die Bedingungsgleichungen zwischen γ_0, γ_1, γ_2, β_0 und C, q, q_1, Q. Die C, q, q_1, Q, welche Function von ϵ sind, wurden für 16 Punkte des Umkreises gerechnet, obgleich, wie sich bei der mechanischen Quadratur herausstellte, acht völlig ausreichend gewesen wären.

♂					♁				
ϵ	C	log q	Q − ϵ	log q_1	ϵ	C	log q	Q − ϵ	log q_1
0	1.32631	0.09601	335° 58′ 22.6	7.4987	0	0.95802	9.88517	207° 34′ 7.1	5.8532
1	1.35393	0.10351	337 18 38.6	7.4912	1	0.97775	9.89132	210 35 37.0	5.8470
2	1.39461	0.11431	338 6 26.9	7.4804	2	1.02964	9.90607	212 56 46.5	5.8323
3	1.44399	0.12625	338 15 44.8	7.4685	3	1.10799	9.92600	214 15 58.0	5.8123
4	1.49609	0.13733	337 48 40.0	7.4574	4	1.20307	9.94737	214 27 24.4	5.7910
5	1.54338	0.14603	336 52 31.8	7.4487	5	1.30132	9.96697	213 36 54.4	5.7714
6	1.57757	0.15141	335 37 3.8	7.4433	6	1.38689	9.98247	211 56 46.4	5.7559
7	1.59147	0.15299	334 12 44.9	7.4418	7	1.44454	9.99230	209 42 19.0	5.7460
8	1.58121	0.15069	332 49 58.8	7.4441	8	1.46331	9.99554	207 10 14.4	5.7428
9	1.54795	0.14481	331 38 40.8	7.4499	9	1.43942	9.99183	204 38 0.7	5.7465
10	1.49798	0.13596	330 48 0.4	7.4588	10	1.37742	9.98139	202 23 39.7	5.7569
11	1.44107	0.12512	330 25 53.7	7.4696	11	1.28893	9.96508	200 45 24.1	5.7732
12	1.38761	0.11368	330 37 52.9	7.4811	12	1.18963	9.94461	200 0 24.2	5.7937
13	1.34599	0.10339	331 25 18.0	7.4914	13	1.09554	9.92267	200 21 57.1	5.8157
14	1.32114	0.09610	332 43 20.7	7.4986	14	1.02008	9.90290	201 54 29.0	5.8354
15	1.31475	0.09339	334 20 16.5	7.5013	15	0.97256	9.88934	204 27 41.0	5.8490

Die Entwickelung von $[C - q \cos(\epsilon' - Q)]$ für die Potenzen $-\frac{1}{2}$ und $-\frac{3}{2}$ geschieht auf dieselbe Weise durch die Methode der §§ 6 und 7, indem C, q, Q beziehungsweise statt D, f, F geschrieben werden. Ist $\mu = m' . 206265''$, so ergeben sich:

	♂									
	$\frac{1}{8}\mu\alpha_0^1$	$\frac{1}{8}\mu\alpha_1^1$	$\frac{1}{8}\mu\alpha_2^1$	$\frac{1}{8}\mu\alpha_3^1$	$\frac{1}{8}\mu\alpha_4^1$	$\frac{1}{8}\mu\alpha_0^3$	$\frac{1}{8}\mu\alpha_1^3$	$\frac{1}{8}\mu\alpha_2^3$	$\frac{1}{8}\mu\alpha_3^3$	$\frac{1}{8}\mu\alpha_4^3$	$\frac{1}{8}\mu\alpha_5^3$
0	8.07941	7.65989	7.39377	7.1675	6.9599	8.70194	8.64249	8.55254	8.44751	8.3333	8.2129
1	8.07171	7.64707	7.37641	7.1457	6.9338	8.66736	8.60532	8.51197	8.40321	8.2851	8.1608
2	8.06097	7.62927	7.35232	7.1156	6.8977	8.61988	8.55421	8.45610	8.34218	8.2187	8.0888
3	8.04730	7.60535	7.31920	7.0735	6.8468	8.55774	8.48659	8.38138	8.25974	8.1283	7.9902
4	8.03213	7.57707	7.27912	7.0218	6.7835	8.48692	8.40846	8.29389	8.16209	8.0202	7.8715
5	8.01798	7.54920	7.23872	6.9694	6.7194	8.42022	8.33387	8.20937	8.06699	7.9140	7.7541
6	8.00750	7.52763	7.20700	6.9278	6.6680	8.37043	8.27745	8.14469	7.99346	7.8314	7.6622
7	8.00273	7.51710	7.19117	6.9068	6.6418	8.34703	8.25053	8.11341	7.95756	7.7908	7.6168
8	8.00478	7.52047	7.19576	6.9125	6.6487	8.35525	8.25956	8.12345	7.96866	7.8030	7.6301
9	8.01382	7.53826	7.22159	6.9462	6.6902	8.39638	8.30601	8.17648	8.02871	7.8702	7.7047
10	8.02880	7.56815	7.26507	7.0030	6.7601	8.46688	8.38526	8.26671	8.13069	7.9843	7.8311
11	8.04728	7.60453	7.31766	7.0713	6.8439	8.55607	8.48449	8.37872	8.25648	8.1244	7.9857
12	8.06530	7.63891	7.36671	7.1346	6.9212	8.64429	8.58136	8.48684	8.37680	8.2574	8.1316
13	8.07849	7.66253	7.39958	7.1763	6.9718	8.70744	8.64977	8.56218	8.45972	8.3482	8.2306
14	8.08448	7.67151	7.41121	7.1905	6.9885	8.73244	8.67624	8.59060	8.49028	8.3810	8.2656
15	8.08401	7.66879	7.40650	7.1839	6.9800	8.72588	8.66857	8.58148	8.47956	8.3686	8.2515

Digitized by Google

♄

	$\frac{1}{8}\mu\alpha_0^1$	$\frac{1}{8}\mu\alpha_1^1$	$\frac{1}{8}\mu\alpha_2^1$	$\frac{1}{8}\mu\alpha_3^1$	$\frac{1}{8}\mu\alpha_4^1$	$\frac{1}{8}\mu\alpha_0^3$	$\frac{1}{8}\mu\alpha_1^3$	$\frac{1}{8}\mu\alpha_2^3$	$\frac{1}{8}\mu\alpha_3^3$	$\frac{1}{8}\mu\alpha_4^3$	$\frac{1}{8}\mu\alpha_5^3$
0	8.94937	8.36391	7.94442	7.5681	7.2119	9.31288	9.14788	8.92984	8.68905	8.4355	8.1737
1	8.94333	8.35302	7.92891	7.5480	7.1873	9.29042	9.12177	8.89959	8.65449	8.3966	8.1304
2	8.92777	8.32396	7.88695	7.4933	7.1200	9.23220	9.05329	8.81946	8.56231	8.2921	8.0136
3	8.90583	8.28197	7.82576	7.4132	7.0209	9.15066	8.95619	8.70486	8.42963	8.1411	7.8442
4	8.88160	8.23469	7.75630	7.3217	6.9076	9.06178	8.84894	8.57719	8.28094	7.9712	7.6528
5	8.85899	8.18990	7.69010	7.2343	6.7990	8.98002	8.74909	8.45744	8.14077	7.8104	7.4712
6	8.84101	8.15400	7.63682	7.1638	6.7114	8.91591	8.67007	8.36217	8.02885	7.6816	7.3256
7	8.82970	8.13139	7.60323	7.1193	6.6560	8.87601	8.62066	8.30243	7.95856	7.6007	7.2339
8	8.82618	8.12451	7.59308	7.1059	6.6394	8.86375	8.60555	8.28424	7.93722	7.5762	7.2062
9	8.83080	8.13401	7.60735	7.1249	6.6631	8.88009	8.62604	8.30921	7.96677	7.6103	7.2450
10	8.84311	8.15886	7.64432	7.1740	6.7242	8.92375	8.68020	8.37480	8.04404	7.6994	7.3459
11	8.86189	8.19621	7.69970	7.2472	6.8152	8.99076	8.76263	8.47406	8.16054	7.8333	7.4973
12	8.88492	8.24134	7.76616	7.3348	6.9238	9.07397	8.86381	8.59503	8.30183	7.9951	7.6799
13	8.90903	8.28777	7.83404	7.4239	7.0341	9.16222	8.96977	8.72072	8.44783	8.1617	7.8671
14	8.93027	8.32796	7.89240	7.6002	7.1283	9.24094	9.06318	8.83066	8.57485	8.3060	8.0289
15	8.94468	8.35495	7.93140	7.5511	7.1909	9.29497	9.12677	8.90509	8.66051	8.4031	8.1375

Die Anwendung der mechanischen Quadratur auf diese Werthe gab $[C - q\cos(\epsilon' - Q)]$ für die Potenzen $-\frac{1}{2}$ und $-\frac{3}{2}$. Der zweite Factor $B = 1 - q_1\cos(\epsilon' + Q)$ wurde mit Berücksichtigung der grössten Glieder gefunden, wie folgt:

$$♂\quad B^{-\frac{1}{2}} = 1 + 0.001331\cos(-\epsilon - \epsilon') - 0.000637\sin(-\epsilon - \epsilon') + 0.000100\cos(-2\epsilon - \epsilon'),$$

$$♄\quad B^{-\frac{1}{2}} = 1 - 0.000028\cos(-\epsilon - \epsilon') - 0.000014\sin(-\epsilon - \epsilon') \qquad B^{-\frac{3}{2}} = 3B^{-\frac{1}{2}} - 2$$

Die Multiplication der Reihen fügte nur geringes dem ersten Factor hinzu. In den so gefundenen $\mu\left(\frac{a}{\Delta}\right)$ und $\mu\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3$ musste alsdann die excentrische Anomalie ϵ' des störenden Planeten durch die mittlere Anomalie g' ersetzt werden.

Die dazu benutzten J-Functionen enthält die folgende Tafel.

	♂							♄					
	z'^{+1}	z'^{0}	z'^{-1}	z'^{-2}	z'^{-3}	z'^{-4}		z'^{+1}	z'^{0}	z'^{-1}	z'^{-2}	z'^{-3}	z'^{-4}
y'^{-1}	7.0361_n	6.66872_n	7.3372_n	8.66683	7.5107	6.428	y'^{-1}	5.5458_n	7.92341_n	5.8468_n	7.9234	6.023	
y'^{-2}	5.33_n		8.96927_n	7.9385_n	8.96550	7.9344	y'^{-2}			8.2244_n	6.449_n	8.22430	6.449
y'^{-3}			7.5132	9.14395_n	8.2896_n	9.13826	y'^{-3}			6.023	8.4006_n	6.8011_n	8.4003
y'^{-4}			5.83_n	7.9382	9.26653_n	8.5378_n	y'^{-4}				6.449	8.5253_n	7.051_n
y'^{-5}				6.528_n	8.2097	9.36011_n	y'^{-5}					6.722	8.6221_n

Mit Hülfe dieser Werthe ergab sich:

Digitized by Google

	♂					♃			
	$\mu\left(\frac{a}{\Delta}\right)$		$\mu\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3$			$\mu\left(\frac{a}{\Delta}\right)$		$\mu\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3$	
ϵ, g'	cos	sin	cos	sin	ϵ, g'	cos	sin	cos	sin
0 0	+0″17783		+0″58642		0 0	+1″23580		+2″05187	
1 0	+ 0.00507	—0″00464	+ 0.09535	—0″06225	1 0	+0·08966	—0″00342	+ 0.52742	—0″01837
2 0	— 0.0009	— 0.0003	— 0.0090	— 0.0125	2 0	+0·0067	— 0.0005	+ 0.0930	— 0.0058
3 0	— 0.0002	+ 0.0001	— 0.005	+ 0.002	3 0	+0·0004		+ 0.013	— 0.001
4 0				+ 0.001	4 0			+ 0.001	
— 2—1	— 0.0001	— 0.0001	— 0.004	— 0.004	—2—1	+ 0.0001		— 0.005	+ 0.003
— 1—1	— 0.0006	— 0.0003	— 0.009	+ 0.006	—1—1	— 0.0007	+ 0.0006	— 0.044	+ 0.021
0—1	+ 0.0023	+ 0.0026	+ 0.065	+ 0.078	0—1	— 0.0189	+ 0.0092	— 0.280	+ 0.136
1—1	+ 0.0575	+ 0.0275	+ 0.4516	+ 0.2112	1—1	— 0.2515	+ 0.1299	— 1.149	+ 0.594
2—1	+ 0.00589	— 0.00207	+ 0.1123	— 0.0248	2—1	— 0.0506	+ 0.0286	— 0.417	+ 0.235
3—1	— 0.00055	— 0.00068	— 0.0031	— 0.0182	3—1	— 0.0069	+ 0.0043	— 0.094	+ 0.057
4—1			— 0.006	— 0.001	4—1	— 0.0007	+ 0.0005	— 0.016	+ 0.011
— 1—2		— 0.0001	— 0.002	— 0.004	—1—2	— 0.0001			— 0.002
0—2	— 0.0002	— 0.0003	— 0.006	+ 0.002	0—2	— 0.0003		+ 0.011	— 0.018
1—2	+ 0.0031	+ 0.0031	+ 0.039	+ 0.085	1—2	+ 0.0021	— 0.0046	+ 0.090	— 0.129
2—2	+ 0.0208	+ 0.0254	+ 0.253	+ 0.300	2—2	+ 0.0549	— 0.0776	+ 0.410	— 0.581
3—2	+ 0.00498	+ 0.00043	+ 0.1057	+ 0.0185	3—2	+ 0.0174	— 0.0267	+ 0.189	— 0.289
4—2	— 0.00005	— 0.00080	+ 0.0061	— 0.0188	4—2	+ 0.0033	— 0.0056	+ 0.051	— 0.085
5—2	— 0.00017	— .00006	— 0.0055	— 0.0032	5—2	+ 0.0005	— 0.0009	+ 0.011	— 0.019
6—2			— 0.001	+ 0.001	6—2	+ 0.00006	— 0.00011	+ 0.0018	— 0.0034
0—3		— 0.0001		— 0.004					
1—3	+ 0.0002	— 0.0002	+ 0.001	+ 0.001	1—3	+ 0.0002	— 0.0002		+ 0.009
2—3	+ 0.0017	+ 0.0034	+ 0.011	+ 0.083	2—3	+ 0.0005	+ 0.0013	— 0.007	+ 0.074
3—3	+ 0.0047	+ 0.0180	+ 0.081	+ 0.287	3—3	— 0.0047	+ 0.0348	— 0.049	+ 0.365
4—3	+ 0.0033	+ 0.0019	+ 0.079	+ 0.052	4—3	— 0.0016	+ 0.0163	— 0.022	+ 0.220
5—3	+ 0.0004	— 0.0007	+ 0.014	— 0.014	5—3	— 0.0003	+ 0.0044	— 0.005	+ 0.077
6—3	— 0.0001	— 0.0002	— 0.003	— 0.005	6—3		+ 0.0009		+ 0.020
7—3			— 0.005		7—3		+ 0.0001		+ 0.004
1—4			— 0.018	— 0.003					
2—4			— 0.001	+ 0.003	2—4			— 0.002	— 0.002
3—4			— 0.013	+ 0.072	3—4			— 0.015	— 0.030
4—4			— 0.032	+ 0.220	4—4			— 0.063	— 0.173
5—4			+ 0.043	+ 0.067	5—4			— 0.049	— 0.123
6—4			+ 0.020	— 0.007	6—4			— 0.022	— 0.050
7—4			+ 0.020	— 0.007	7—4			— 0.007	— 0.015
8—4			— 0.001	— 0.001	8—4			— 0.002	— 0.003

Nach den Vorschriften des § 9 wurden dann gerechnet:

♂

$$\alpha^2\left(\frac{r'}{a'}\right)^2-\left(\frac{r}{a}\right)^2=(9.73970_n)+2(9.07838)\cos\epsilon-2(8.6245)\cos g'$$
$$-2(7.5547)\cos 2\epsilon-2(6.9914)\cos 2g'$$
$$-\alpha\sin J\left(\frac{r'}{a'}\right)\sin(f'+\Pi')=(8.00405)$$
$$-2(8.5558)\cos(-g')-2(8.3262)\sin(-g')$$
$$-2(7.223)\cos(-2g')-2(6.994)\sin(-2g')$$
$$-2(6.07)\cos(-3g')-2(5.84)\sin(-3g')$$

Digitized by Google

	(H)	
ϵ, g'	cos	sin
—1—1	+0.″0002	—0.″0002
0—1	— 0.0182	— 0.0087
1—1	+ 0.1516	+ 0.0729
0—2	— 0.0034	— 0.0016
1—2	+ 0.0282	+ 0.0136
0—3	— 0.0005	— 0.0002
1—3	+ 0.0044	+ 0.0021

♁

$$\alpha^2\left(\frac{r'}{a'}\right)^2-\left(\frac{r}{a}\right)^2=(9.90975_n)+2(9.07838)\cos\epsilon+2(7.5139_n)\cos g'$$
$$+2(7.5547_n)\cos 2\epsilon+2(5.136_n)\cos 2g'$$
$$-\alpha\sin J\left(\frac{r'}{a'}\right)\sin(f'+\Pi')=(6.9990_n)$$
$$+2(8.2974)\cos(-g')+2(7.7864_n)\sin(-g')$$
$$+2(6.221)\cos(-2g')+2(5.710_n)\sin(-2g')$$

	(H)	
ϵ, g'	cos	sin
—1—1	—0.″0031	+0.″0041
0—1	+ 0.3156	— 0.1632
1—1	— 2.6318	+ 1.3584
0—2	+ 0.0106	— 0.0055
1—2	— 0.0883	+ 0.0456
0—3	+ 0.0003	— 0.0001
1—3	— 0.0025	+ 0.0013

Die Multiplication dieser Reihen mit $\mu\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3$ giebt den Formeln (III) § 4 gemäss $ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$ und $a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$. $a\Omega$ setzt sich einfach aus $\mu\left(\frac{a}{\Delta}\right)$ und (H) zusammen.

Um endlich die letzte Verwandlung auszuführen, musste eine neue Reihe J-Functionen bestimmt werden, nämlich:

♂

i'	$J^0_{i'\lambda}-1$	$J^1_{i'\lambda}$	$J^2_{i'\lambda}$	$J^3_{i'\lambda}$
1	8.071_n	9.0333	7.769	6.33
2	8.669_n	9.3264	8.356	7.22
3	9.014_n	9.4898	8.710	7.75

♁

i'	$J^0_{i'\lambda}-1$	$J^1_{i'\lambda}$	$J^2_{i'\lambda}$	$J^3_{i'\lambda}$
1	8.616_n	9.3012	8.313	7.15
2	9.204_n	9.5745	8.897	8.04
3	9.534_n	9.7031	9.218	8.54

mit deren Hülfe die folgenden Reihen abgeleitet wurden.

Digitized by Google

ε, με	(i) a Ω cos	(i) a Ω sin	ar (dΩ/dr) cos	ar (dΩ/dr) sin
0 0			—0″24123	
1 0	+0″00507	—0″00464	—0.00363	+0″01417
2 0	—0.0018	—0.0005	+0.0048	+0.0002
3 0			+0.001	—0.001
—2—1				+0.001
—1—1				+0.001
0—1	+0.010	+0.005	+0.045	+0.015
1—1	—0.0943	—0.0445	—0.2903	—0.1417
2—1	+0.0017	—0.0088	—0.0431	—0.0027
3—1	—0.0008	—0.0027	+0.0014	+0.0033
4—1	—0.001		+0.001	
—1—2	—0.001		—0.002	
0—2	+0.006	+0.003	+0.011	+0.007
1—2	—0.032	—0.021	—0.017	—0.004
2—2	+0.031	+0.046	—0.074	—0.092
3—2	+0.022	+0.012	—0.034	—0.015
4—2	+0.0041	—0.0015	—0.0036	+0.0037
5—2		—0.001	+0.001	+0.001
0—3	+0.001	+0.001	+0.002	+0.001
1—3	—0.004	—0.001	—0.004	+0.001
2—3	—0.002	—0.011		+0.013
3—3	+0.009	+0.048	—0.015	—0.076
4—3	+0.016	+0.025	—0.022	—0.030
5—3	+0.0067	+0.0023	—0.0071	—0.0009
6—3	+0.0008	—0.0012	—0.0004	+0.0015

ε, με	(i) a Ω cos	(i) a Ω sin	ar (dΩ/dr) cos	ar (dΩ/dr) sin
0 0			—1″38757	
1 0	+0″08966	—0″00342	—0.12962	+0″00862
2 0	+0.0134	—0.0011	—0.0118	+0.0012
3 0			—0.001	
—2—1	—0.003	+0.001	—0.011	+0.006
—1—1	+0.047	—0.022	+0.124	—0.067
0—1	—0.479	+0.248	—0.888	+0.460
1—1	+2.302	—1.189	+2.973	—1.532
2—1	+0.383	—0.193	+0.742	—0.391
3—1	+0.010	—0.002	+0.105	—0.058
4—1	—0.006	+0.004	+0.012	—0.007
5—1	—0.001	+0.001	+0.001	
—2—2	—0.001		—0.002	+0.001
—1—2	+0.006	—0.002	+0.012	—0.007
0—2	—0.026	+0.007	—0.051	+0.034
1—2	+0.039	+0.010	+0.123	—0.108
2—2	+0.107	—0.121	—0.099	+0.167
3—2	+0.087	—0.121	—0.105	+0.160
4—2	+0.040	—0.060	—0.044	+0.069
5—2	+0.012	—0.020	—0.012	+0.020
6—2	+0.0029	—0.0051	—0.0025	+0.0042
7—2	+0.0005	—0.0008	—0.0002	+0.0007
0—3	—0.001	—0.002	—0.002	+0.004
1—3	—0.001	+0.013	+0.004	—0.018
2—3	+0.008	—0.042	—0.009	+0.058
3—3	—0.005	+0.040	+0.010	—0.069
4—3	—0.011	+0.086	+0.014	—0.113
5—3	—0.007	+0.062	+0.007	—0.072
6—3	—0.002	+0.029	+0.002	—0.029
7—3		+0.009		—0.008
8—3		+0.002		—0.002

ε, με	a² (dΩ/dZ) cos	a² (dΩ/dZ) sin
0 0	—0 00207	
1 0	—0.01969	+0″00164
2 0	—0.0041	+0.0028
3 0		+0.001

ε, με	a² (dΩ/dZ) cos	a² (dΩ/dZ) sin
0 0	—0″01481	
1 0	—0.02791	+0″00461
2 0	—0.0098	+0.0020
3 0	—0.002	+0.001

Digitized by Google

Abschnitt V.

Entwickelung und Integration der Differentialgleichungen.

§ 17.

Aus $(i)a\Omega$ und $ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$ muss zunächst nach (I^a) § 2 $\frac{dW}{dt}$ abgeleitet werden. Da jene Grössen als Function der Zeit nur von der excentrischen Anomalie ϵ abhängen, so ist es nothwendig, vermittelst der Gleichung $n\,dt = \frac{r}{a}d\epsilon$ auch $\frac{dW}{d\epsilon}$ einzuführen. Die Form (I^a) nimmt dann die Gestalt an

$$\frac{dW}{d\epsilon} = M\,a\left(\frac{d\Omega}{d\epsilon}\right) + N\,ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right),$$

$$\text{wo } M = B_0 + 2B_1\cos\epsilon + 2B_2\cos 2\epsilon + 2A_{-1}\cos(\eta+\epsilon) + 2A_0\cos\eta + 2A_1\cos(\eta-\epsilon) + 2A_2\cos(\eta-2\epsilon)$$

$$N = \quad 2D_1\sin\epsilon + 2D_2\sin 2\epsilon + 2C_{-1}\sin(\eta+\epsilon) + 2C_0\sin\eta + 2C_1\sin(\eta-\epsilon) + 2C_2\sin(\eta-2\epsilon),$$

und die Coefficienten nur von der Excentricität des gestörten Planeten abhängen. Um die Multiplication auszuführen, werden wieder die imaginären Exponentialfunctionen gewählt. Es sei

$$\upsilon = h^{\eta\sqrt{-1}}, \quad y = h^{\epsilon\sqrt{-1}}, \quad \text{also} \quad d\epsilon = \frac{dy}{y\sqrt{-1}}.$$

Hierdurch wird

$$dW = \frac{dy}{y}\left\{\left[B_0 + B_1 y + B_2 y^2 + B_1\frac{1}{y} + B_2\frac{1}{y^2}\right] + \frac{1}{\upsilon}\left[A_{-1}\frac{1}{y} + A_0 + A_1 y + A_2 y^2\right] + \upsilon\left[A_{-1}y + A_0 + A_1\frac{1}{y} + A_2\frac{1}{y^2}\right]\right\} ay\left(\frac{d\Omega}{dy}\right)$$

$$+ \frac{dy}{y}\left\{\left[\quad D_1 y + D_2 y^2 - D_1\frac{1}{y} - D_2\frac{1}{y^2}\right] + \frac{1}{\upsilon}\left[C_{-1}\frac{1}{y} + C_0 + C_1 y + C_2 y^2\right] - \upsilon\left[C_{-1}y + C_0 + C_1\frac{1}{y} + C_2\frac{1}{y^2}\right]\right\} ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$$

Setzt man für $ay\left(\frac{d\Omega}{dy}\right)$ und $ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$ die gefundenen Werthe ein, und führt die Multiplication aus, so wird

$$(1) \qquad 2dW = \frac{dy}{y}\Sigma\Sigma\left\{\left[F(i,i',c) + \frac{1}{\upsilon}G(i,i',c) + \upsilon H(i,i',c)\right] - \sqrt{-1}\left[F(i,i',s) + \frac{1}{\upsilon}G(i,i',s) + \upsilon H(i,i',s)\right]\right\}\pi^{i'}y^{i-i'\mu}.$$

Das Bildungsgesetz der F, G, H erkennt man leicht, wenn man beide Formen vergleicht. Ausserdem folgt aus der Beschaffenheit der Coefficienten A, B, C, D, dass F, G, H von einander abhängig sind, und daher nur G und H direkt berechnet zu werden brauchen.

Auf ähnliche Weise wird die Gleichung (II) § 3 umgeformt. Führt man in den Factor von $\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$ auch die excentrische Anomalie ein, und nennt die Coefficienten den obigen D und C entsprechend M und N, so wird

$$\frac{dR}{\cos i} = \frac{dy}{y}\left\{\left[M_1 y + M_2 y^2 - M_1\frac{1}{y} - M_2\frac{1}{y^2}\right] + \frac{1}{\upsilon}\left[N_{-1}\frac{1}{y} + N_0 + N_1 y + N_2 y^2\right] - \upsilon\left[N_{-1}y + N_0 + N_1\frac{1}{y} + N_2\frac{1}{y_2}\right]\right\} a^2\frac{d\Omega}{dZ}$$

$$(2) \qquad \frac{2dR}{\cos i} = \frac{dy}{y}\Sigma\Sigma\left\{\left[T(i,i',c) + \frac{1}{\upsilon}U(i,i',c) + \upsilon V(i,i',c)\right] - \sqrt{-1}\left[T(i,i',s) + \frac{1}{\upsilon}U(i,i',s) + \upsilon V(i,i',s)\right]\right\}\pi^{i'}y^{i-i'\mu}$$

Wegen der Beschaffenheit der Coefficienten M und N ist $T(i,i') = -U(i+1,i') - V(i-1,i')$.

Digitized by Google

Mit der Excentricität der Feronia erhielt ich folgende Constanten

$A_{-1} = 7.86202$	A_0 9.260752_n	A_1 0.3057455	A_2 8.783631_n
C_{-1} 7.86202	C_0 8.783631_n	C_1 0.0031493_n	C_2 8.783631
N_{-1} 7.5547	N_0 8.95344_n	N_1 9.702074	N_2 8.47632_n

mit welchen die Coefficienten der Gleichungen (1) und (2) für die vier störenden Planeten abgeleitet wurden.

Jupiter.

F (0,0)		+ 0″05088	4—1	— 0″017	— 0″017	—1—3	— 0″006	+ 0″021	2—4	— 2″358	+ 0″040
G (1,0)	— 20″34735	— 0.10177		+ 0.002	— 0.002		+ 0.005	— 0.030		+ 0.830	— 0.320
F (1,0)	+ 2.0801	— 0.4647		+ 0.023	+ 0.029		+ 0.007	— 0.010		+ 2.6425	— 0.0772
G (2,0)	+ 1.7211	— 0.2182		+ 0.008	+ 0.010		+ 0.006	— 0.019		+ 1.115	— 0.357
H (0,0)	— 3.66255	+ 0.84959	5—1	+ 0.001	— 0.001	0—3	+ 0.025	— 0.291	3—4	+ 7.880	— 8.008
	+ 0.1387	+ 0.1667		0.000	0.000		+ 0.0486	+ 0.2354		— 2.314	+ 2.923
F (2,0)	+ 0.441	+ 0.140		— 0.001	+ 0.001		— 0.084	+ 0.287		— 8.051	+ 8.613
G (3,0)	— 0.165	+ 0.016		0.000	0.000		— 0.010	+ 0.231		— 2.485	+ 3.528
H (1,0)	— 0.493	— 0.193				1—3	+ 0.0965	+ 2.9588	4—4	+ 4.473	+ 20.661
	— 0.218	— 0.037	—2—2	+ 0.006	+ 0.003		— 0.4674	— 1.1988		— 1.471	— 6.501
F (3,0)	— 0.039	+ 0.019		— 0.012	— 0.003		+ 0.0431	— 3.3517		— 4.370	— 21.171
G (4,0)	— 0.002	— 0.006		+ 0.002	— 0.001		— 0.3278	— 1.5917		— 1.368	— 7.011
H (2,0)	+ 0.060	— 0.020		— 0.004	— 0.001	2—3	— 6.347	— 14.108	5—4	+ 0.873	+ 0.210
	+ 0.019	— 0.007	—1—2	— 0.102	+ 0.064		+ 2.810	+ 4.349		— 0.327	— 0.231
F (4,0)		— 0.003		+ 0.142	— 0.108		+ 7.3556	+ 14.9262		— 0.780	+ 0.205
G (5,0)	+ 0.001			+ 0.046	— 0.012		+ 3.819	+ 5.167		— 0.234	+ 0.184
H (3,0)		+ 0.004		+ 0.086	— 0.056	3—3	+ 41.174	+ 9.903	6—4	+ 0.004	— 0.117
	+ 0.001	+ 0.001	0—2	+ 1.089	— 1.072		— 12.828	— 2.993		— 0.008	+ 0.031
				— 0.726	+ 1.113		— 42.197	— 10.439		+ 0.016	+ 0.135
—3—1	+ 0.005	— 0.002		— 1.279	+ 0.860		— 13.851	— 3.529		+ 0.012	+ 0.049
	— 0.006	+ 0.004		— 0.916	+ 0.901	4—3	+ 0.484	— 1.165	7—4	— 0.001	0.000
		— 0.001	1—2	— 11.530	+ 12.343		— 0.508	+ 0.309		0.000	+ 0.001
	— 0.001	+ 0.001		+ 3.754	— 5.503		+ 0.367	+ 1.361		+ 0.002	— 0.003
—2—1	— 0.012	+ 0.053		+ 13.706	— 13.517		+ 0.343	+ 0.505		+ 0.001	— 0.002
	+ 0.004	— 0.078		+ 5.930	— 6.677	5—3	— 0.182	— 0.076			
	+ 0.018	— 0.001	2—2	+ 49.687	— 60.926		+ 0.044	+ 0.029	0—5	— 0.004	
	+ 0.010	— 0.026		— 14.975	+ 18.429		+ 0.220	+ 0.061		+ 0.003	— 0.002
—1—1	— 0.262	— 0.185		— 51.534	+ 63.060		+ 0.082	+ 0.013		+ 0.003	+ 0.001
	+ 0.4556	+ 0.1803		— 16.822	+ 20.563	6—3	+ 0.003	+ 0.001		+ 0.002	— 0.001
	— 0.114	+ 0.198	3—2	— 1.698	— 0.461		+ 0.001	+ 0.001	1—5	+ 0.031	— 0.020
	+ 0.080	+ 0.194		+ 0.108	+ 0.749		— 0.007	— 0.004		— 0.008	+ 0.025
0—1	+ 0.4661	+ 1.0260		+ 2.745	— 0.860		— 0.003	— 0.002		— 0.040	+ 0.016
	— 1.0938	+ 1.2729		+ 1.155	— 0.572					— 0.017	+ 0.021
	+ 0.1986	— 3.2299	4—2	— 0.216	+ 0.215	—1—4	0.000	+ 0.003	2—5	— 0.124	+ 0.308
	— 0.4291	— 0.9310		+ 0.064	— 0.051		— 0.002	— 0.003		— 0.016	— 0.147
1—1	— 3.575	— 8.419		+ 0.221	— 0.266			— 0.002		+ 0.153	— 0.348
	— 1.580	— 3.263		+ 0.069	— 0.102		— 0.002	— 0.002		+ 0.013	— 0.187
	+ 6.3992	+ 14.5734	5—2	+ 0.005	— 0.010	0—4	— 0.023	— 0.028	3—5	— 0.623	— 1.940
	+ 1.244	+ 2.891		+ 0.001	0.000		+ 0.0286	+ 0.0127		+ 0.378	+ 0.611
2—1	— 0.114	+ 2.884		— 0.010	+ 0.014		+ 0.015	+ 0.034		+ 0.730	+ 2.082
	+ 0.450	— 0.302		— 0.004	+ 0.004		+ 0.021	+ 0.019		+ 0.485	+ 0.753
	— 0.230	— 3.399				1—4	+ 0.2866	+ 0.1939	4—5	+ 6.629	+ 2.571
	+ 0.106	— 0.817	—2—3	+ 0.001	— 0.001		— 0.1796	— 0.0045		— 2.257	— 0.663
3—1	+ 0.117	+ 0.363		— 0.002	+ 0.002		— 0.3094	— 0.2514		— 6.925	— 2.540
	— 0.043	— 0.114		0.000	0.000		— 0.2023	— 0.0620		— 2.553	— 0.631
	— 0.131	— 0.360		— 0.001	+ 0.001						
	— 0.057	— 0.111									

Digitized by Google

5—5	— 7.961	+ 6.249
	+ 2.506	— 2.015
	+ 8.207	— 6.272
	+ 2.752	— 2.038
6—5	+ 0.035	+ 0.578
	+ 0.047	— 0.239
	— 0.191	— 0.453
	— 0.109	— 0.114
7—5	+ 0.063	— 0.020
	— 0.018	+ 0.001
	— 0.067	+ 0.036
	— 0.022	+ 0.017
1—6	— 0.001	— 0.004
	+ 0.0031	+ 0.0025
		+ 0.005
	+ 0.002	+ 0.003
2—6	+ 0.0315	+ 0.0325
	— 0.0233	— 0.0051
	— 0.0328	— 0.0403
	— 0.0246	— 0.0129
3—6	— 0.316	— 0.046
	+ 0.120	— 0.030
	+ 0.351	+ 0.050
	+ 0.155	— 0.026
4—6	+ 1.191	— 0.944
	— 0.343	+ 0.395
	— 1.239	+ 1.035
	— 0.391	+ 0.486

5—6	+ 0.225	+ 4.140
	— 0.170	— 1.359
	— 0.288	— 4.263
	— 0.233	— 1.482
6—6	— 4.244	— 2.050
	+ 1.364	+ 0.634
	+ 4.293	+ 2.161
	+ 1.413	+ 0.745
7—6	— 0.315	+ 0.140
	+ 0.135	— 0.032
	+ 0.231	— 0.179
	+ 0.051	— 0.071
8—6	+ 0.022	+ 0.028
	— 0.004	— 0.009
	— 0.031	— 0.027
	— 0.013	— 0.008
1—7	0.000	0.000
	+ 0.00025	— 0.00027
	0.000	0.000
	0.000	0.000
2—7	+ 0.005633	— 0.001999
	— 0.002084	+ 0.003040
	— 0.006663	+ 0.001351
	— 0.003114	+ 0.002392
3—7	— 0.026	+ 0.039
	+ 0.002	— 0.020
	+ 0.03059	— 0.04264
	+ 0.007	— 0.024

4—7	— 0.046	— 0.264
	+ 0.045	+ 0.087
	+ 0.055	+ 0.286
	+ 0.054	+ 0.109
5—7	+ 0.898	+ 0.502
	— 0.328	— 0.123
	— 0.953	— 0.504
	— 0.383	— 0.125
6—7	— 2.021	+ 1.073
	+ 0.645	— 0.394
	+ 2.064	— 1.119
	+ 0.688	— 0.440
7—7	— 0.019	— 2.151
	+ 0.017	+ 0.688
	— 0.023	+ 2.192
	— 0.025	+ 0.729
8—7	— 0.140	— 0.133
	+ 0.047	+ 0.058
	+ 0.138	+ 0.093
	+ 0.045	+ 0.018
9—7	— 0.010	+ 0.015
	+ 0.005	— 0.003
	+ 0.006	— 0.020
	+ 0.001	— 0.008
3—8	+ 0.003	+ 0.006
	— 0.003	— 0.001
	— 0.003	— 0.007
	— 0.003	— 0.002

4—8	— 0.041	— 0.013
	+ 0.017	— 0.002
	+ 0.045	+ 0.014
	+ 0.021	— 0.001
5—8	+ 0.175	— 0.102
	— 0.051	+ 0.050
	— 0.185	+ 0.113
	— 0.061	+ 0.061
6—8	— 0.064	+ 0.645
	— 0.006	— 0.219
	+ 0.053	— 0.672
	— 0.017	— 0.246
7—8	— 0.972	— 0.728
	+ 0.334	+ 0.223
	+ 0.998	+ 0.739
	+ 0.360	+ 0.234
8—8	+ 0.864	— 0.437
	— 0.276	+ 0.145
	— 0.889	+ 0.426
	— 0.301	+ 0.134
9—8	+ 0.031	— 0.094
	— 0.014	+ 0.033
	— 0.017	+ 0.087
	0.000	+ 0.026

Saturn.

½ F (0,0)		+ 0″00096
G (1,0)	— 0″84329	— 0.00192
F (1,0)	+ 0.106	— 0.010
G (2,0)	+ 0.062	— 0.002
H (0,0)	— 0.16863	+ 0.01602
	0.000	+ 0.004
2 0	+ 0.011	+ 0.013
	— 0.007	— 0.003
	— 0.011	— 0.014
	— 0.007	— 0.004
3 0	— 0.001	— 0.001
	0.000	0.000
	+ 0.002	+ 0.001
	+ 0.001	0.000
—1—1	— 0.008	— 0.004
	+ 0.0150	+ 0.0057
	— 0.010	+ 0.002
	— 0.003	+ 0.004
0—1	— 0.01853	+ 0.01352
	— 0.0959	+ 0.0169
	+ 0.1320	— 0.0433
	+ 0.0176	— 0.0129
1—1	+ 0.178	— 0.116
	+ 0.068	— 0.054
	— 0.3014	+ 0.2062
	— 0.056	+ 0.036

2—1	— 0″008	— 0″064
	— 0.011	+ 0.032
	+ 0.018	+ 0.055
	— 0.001	+ 0.023
—1—2	0.000	— 0.004
	+ 0.0010	+ 0.0055
	— 0.002	+ 0.002
	— 0.001	+ 0.003
0—2	— 0.0176	+ 0.0544
	— 0.0022	— 0.0414
	+ 0.0360	— 0.0631
	+ 0.0162	— 0.0501
1—2	+ 0.215	— 0.698
	— 0.067	+ 0.276
	— 0.2590	+ 0.7950
	— 0.111	+ 0.373
2—2	— 0.952	+ 3.446
	+ 0.308	— 1.116
	+ 0.967	— 3.491
	+ 0.323	— 1.161
3—2	+ 0.029	+ 0.020
	— 0.003	— 0.032
	— 0.048	+ 0.050
	— 0.022	+ 0.038
0—3	— 0.0025	+ 0.0147
	— 0.0008	— 0.0116
	+ 0.0055	— 0.0162
	+ 0.0022	— 0.0131

1—3	+ 0″027	— 0″183
	— 0.004	+ 0.079
	— 0.033	+ 0.206
	— 0.010	+ 0.102
2—3	— 0.061	+ 0.995
	+ 0.011	— 0.340
	+ 0.054	— 1.029
	+ 0.004	— 0.374
3—3	— 0.385	— 0.965
	+ 0.127	+ 0.309
	+ 0.386	+ 0.991
	+ 0.128	+ 0.335
4—3	— 0.019	— 0.011
	+ 0.009	+ 0.010
	+ 0.011	— 0.008
	+ 0.001	— 0.009
1—4	— 0.001	— 0.034
	+ 0.002	+ 0.015
		+ 0.038
	+ 0.001	+ 0.019
2—4	+ 0.032	+ 0.197
	— 0.016	— 0.070
	— 0.035	— 0.207
	— 0.019	— 0.080
3—4	— 0.223	— 0.337
	+ 0.078	+ 0.112
	+ 0.230	+ 0.347
	+ 0.085	+ 0.122

4—4	+ 0″248	+ 0″141
	— 0.080	— 0.044
	— 0.254	— 0.149
	— 0.086	— 0.052
5—4	— 0.007	+ 0.002
	.	— 0.002
	+ 0.012	0.000
	+ 0.005	0.000
1—5	— 0.001	— 0.005
	+ 0.001	+ 0.003
	+ 0.001	+ 0.006
	+ 0.001	+ 0.003
2—5	+ 0.013	+ 0.032
	— 0.006	— 0.012
	— 0.014	— 0.034
	— 0.007	— 0.014
3—5	— 0.072	— 0.072
	+ 0.027	+ 0.024
	+ 0.075	+ 0.074
	+ 0.030	+ 0.026
4—5	+ 0.132	+ 0.047
	— 0.045	— 0.015
	— 0.136	— 0.048
	— 0.049	— 0.016
5—5	— 0.073	+ 0.011
	+ 0.023	— 0.004
	+ 0.076	— 0.010
	+ 0.026	— 0.003

Digitized by Google

Mars.

½ F (0,0)		+0″00030	2—1	+0″0013	+0″0297	2—2	—0″097	—0″141	2—3	+0″005	+0″034
G (1,0)	+0″24239	— 0.00059		+ 0.0349	— 0.0207		+ 0.137	+ 0.186		— 0.005	— 0.039
F (1,0)	— 0.0006	+ 0.014		— 0.0408	— 0.0211		— 0.006	+ 0.004		— 0.002	— 0.007
G (2,0)	— 0.0007	— 0.024		— 0.0046	— 0.0121		+ 0.034	+ 0.049		— 0.002	— 0.012
H (0,0)	— 0.00825	+ 0.00497	3—1	+ 0.005	+ 0.006	3—2	— 0.060	— 0.026	3—3	— 0.027	— 0.147
	— 0.0095	— 0.005		— 0.005	— 0.005		+ 0.073	+ 0.032		+ 0.032	+ 0.174
2 0	+ 0.005			— 0.0018	— 0.0035		+ 0.002	— 0.005		+ 0.004	+ 0.024
	— 0.009			— 0.002	— 0.002		+ 0.015	+ 0.001		+ 0.009	+ 0.051
	+ 0.002	+ 0.001				4—2	— 0.008	+ 0.006	4—3	— 0.045	— 0.064
	— 0.002	+ 0.001	0—2	— 0.024	— 0.012		+ 0.009	— 0.009		+ 0.052	+ 0.072
				+ 0.008	+ 0.003		— 0.001	— 0.001		+ 0.007	+ 0.006
0—1	— 0.060	— 0.029		+ 0.027	+ 0.015		0.000	— 0.004		+ 0.014	+ 0.014
	+ 0.010	+ 0.012		+ 0.011	+ 0.006				5—3	— 0.017	— 0.003
	+ 0.091	+ 0.037	1—2	+ 0.098	+ 0.063	1—3	+ 0.013	+ 0.004		+ 0.018	+ 0.003
	+ 0.041	+ 0.020		— 0.049	— 0.041		— 0.005	— 0.002		+ 0.002	— 0.002
1—1	+ 0.281	+ 0.133		— 0.082	— 0.043		— 0.013	— 0.003		+ 0.003	— 0.002
	+ 0.1061	+ 0.0551		— 0.033	— 0.021		— 0.005	— 0.001			
	— 0.479	— 0.233									
	— 0.092	— 0.045									

Erde.

½ F (0,0)		+0″00011	2—1	—1″053	+0″530	2—2	—0″322	+0″368	1—3	+0″003	—0″041
G (1,0)	+1″38678	— 0.00022		+ 0.060	— 0.016		+ 0.312	— 0.408		— 0.008	+ 0.049
F (1,0)	— 0.186	+ 0.010		+ 1.280	— 0.658		+ 0.118	— 0.086		+ 0.003	+ 0.008
G (2,0)	+ 0.226	— 0.015		+ 0.287	— 0.144		+ 0.108	— 0.126		— 0.002	+ 0.016
H (0,0)	— 0.03342	+ 0.00180	3—1	— 0.025	+ 0.006	3—2	— 0.243	+ 0.336	2—3	— 0.023	+ 0.130
	+ 0.007	— 0.003		— 0.064	+ 0.042		+ 0.266	— 0.381		+ 0.025	— 0.149
2 0	— 0.027	+ 0.002		+ 0.095	— 0.050		+ 0.046	— 0.050		+ 0.006	— 0.028
	+ 0.025	— 0.003		+ 0.006	— 0.002		+ 0.069	— 0.095		+ 0.008	— 0.047
	+ 0.001		4—1	+ 0.014	— 0.010	4—2	— 0.103	+ 0.156	3—3	+ 0.017	— 0.126
	— 0.001	— 0.001		— 0.019	+ 0.012		+ 0.112	— 0.170		— 0.021	+ 0.147
				+ 0.002			+ 0.016	— 0.022		— 0.003	+ 0.025
—2—1	+ 0.026	— 0.012		— 0.003	+ 0.002		+ 0.025	— 0.036		— 0.007	+ 0.046
	— 0.018	+ 0.009				5—2	— 0.030	+ 0.050	4—3	+ 0.030	— 0.247
	— 0.028	+ 0.013	—1—2	— 0.024	+ 0.009		+ 0.031	— 0.052		— 0.033	+ 0.274
	— 0.020	+ 0.010		+ 0.009	— 0.001		+ 0.005	— 0.008		— 0.005	+ 0.048
—1—1	— 0.272	+ 0.134		+ 0.028	— 0.013		+ 0.006	— 0.010		— 0.008	+ 0.075
	+ 0.150	— 0.069		+ 0.013	— 0.005	6—2	— 0.006	+ 0.011	5—3	+ 0.016	— 0.168
	+ 0.301	— 0.155	0—2	+ 0.092	— 0.028		+ 0.006	— 0.012		— 0.018	+ 0.182
	+ 0.179	— 0.090		— 0.016	— 0.014		+ 0.001	— 0.001		— 0.003	+ 0.030
0—1	+ 1.904	— 0.983		— 0.113	+ 0.054		+ 0.001	— 0.002		— 0.005	+ 0.044
	— 0.663	+ 0.340		— 0.037	+ 0.012	7—2	— 0.0010	+ 0.0016	6—3	+ 0.007	— 0.073
	— 2.186	+ 1.130	1—2	— 0.109	— 0.035		+ 0.0009	— 0.0017		— 0.007	+ 0.077
	— 0.945	+ 0.487		— 0.064	+ 0.141		+ 0.0004	+ 0.0001		— 0.002	+ 0.014
1—1	— 6.869	+ 3.542		+ 0.204	— 0.090		+ 0.0003	0.0000		— 0.002	+ 0.018
	+ 1.520	— 0.778		+ 0.031	+ 0.016				7—3	+ 0.001	— 0.022
	+ 7.614	— 3.929								— 0.001	+ 0.023
	+ 2.265	— 1.165								— 0.001	+ 0.004
										— 0.001	+ 0.005

Aus $a^2\left(\frac{d\Omega}{d\bar{Z}}\right)$ und den N-Coefficienten rechnete ich alsdann die Coefficienten der Form (2).

Digitized by Google

Jupiter.

½ T (0, 0)		−0″00474	0—2	+0″139	−0″176	1—4	+0″0224	−0″0242	2—6	+0″0035	−0″029
U (1, 0)	+1″02487	+ 0.00474		− 0.530	+ 0.395		− 0.0884	+ 0.0199		− 0.0120	+ 0.008
T (1, 0)	− 0.074	− 0.007		+ 0.391	− 0.219		+ 0.0660	+ 0.0043		+ 0.0085	+ 0.021
U (2, 0)	− 1.941	− 0.033	1—2	+ 0.006	− 0.009	2—4	+ 0.017	+ 0.058	3—6	+ 0.001	+ 0.012
V (0, 0)	+ 2.01498	+ 0.03957		+ 1.239	− 1.477		+ 0.185	− 0.252		+ 0.030	− 0.035
T (2, 0)	+ 0.230	+ 0.006		− 1.245	+ 1.486		− 0.2020	+ 0.1943		− 0.0311	+ 0.0227
U (3, 0)	+ 0.180	− 0.058	2—2	− 0.104	+ 0.130	3—4	− 0.016	+ 0.012	4—6	− 0.014	− 0.004
V (1, 0)	− 0.410	+ 0.052		− 0.379	+ 0.189		+ 0.065	+ 0.489		+ 0.013	+ 0.103
T (3, 0)	− 0.022	+ 0.007		+ 0.483	− 0.319		− 0.050	− 0.501		+ 0.001	− 0.099
U (4, 0)	− 0.001	+ 0.008	3—2	+ 0.039	− 0.014	4—4	− 0.007	− 0.044	5—6	0.000	− 0.008
V (2, 0)	+ 0.023	− 0.015		+ 0.333	− 0.377		+ 0.062	− 0.106		− 0.087	− 0.062
				− 0.372	+ 0.391		− 0.055	+ 0.150		+ 0.087	+ 0.070
−3—1	+ 0.002	− 0.002	4—2	− 0.040	+ 0.045	5—4	− 0.008	+ 0.011	6—6	+ 0.008	+ 0.006
	− 0.003	+ 0.001		− 0.017	+ 0.027		+ 0.017	+ 0.110		+ 0.005	+ 0.033
	+ 0.001	+ 0.001		+ 0.057	− 0.072		− 0.009	− 0.121		− 0.013	− 0.039
−2—1	− 0.006	+ 0.030	5—2	+ 0.002	− 0.003	6—4	− 0.002	− 0.013	7—6	0.000	− 0.004
	+ 0.024	− 0.043		− 0.002	0.000		0.000	− 0.004		− 0.020	− 0.012
	− 0.018	+ 0.013		0.000	+ 0.003		+ 0.002	+ 0.017		+ 0.020	+ 0.016
−1—1	− 0.060	− 0.129									
	+ 0.004	+ 0.382	−1—3	− 0.002	+ 0.009	1—5	− 0.002	− 0.006	1—7	0.000	0.000
	+ 0.056	− 0.253		+ 0.006	− 0.014		− 0.003	+ 0.014		+ 0.00028	− 0.00011
0—1	+ 0.015	+ 0.034		− 0.004	+ 0.005		+ 0.005	− 0.008		0.000	0.000
	− 0.494	− 1.159	0—3	− 0.020	− 0.043	2—5	+ 0.019	+ 0.007	2—7	− 0.00012	− 0.00083
	+ 0.479	+ 1.125		+ 0.0055	+ 0.1211		− 0.033	− 0.058		− 0.00078	+ 0.00179
1—1	+ 0.010	+ 0.020		+ 0.014	− 0.078		+ 0.014	+ 0.051		+ 0.00090	− 0.00096
	+ 0.121	+ 0.649	1—3	+ 0.1155	+ 0.0221	3—5	− 0.021	+ 0.021	3—7	+ 0.002	+ 0.001
	− 0.131	− 0.669		− 0.2754	− 0.3972		+ 0.179	+ 0.049		− 0.003	− 0.008
2—1	− 0.003	− 0.057		+ 0.1599	+ 0.3751		− 0.158	− 0.070		+ 0.00075	+ 0.00700
	− 0.411	− 0.936	2—3	+ 0.004	+ 0.024	4—5	− 0.012	− 0.006	4—7	− 0.005	+ 0.003
	+ 0.414	+ 0.993		+ 0.966	+ 0.281		− 0.199	+ 0.121		+ 0.027	+ 0.010
3—1	+ 0.048	+ 0.111		− 0.9697	− 0.3052		+ 0.211	− 0.115		− 0.022	− 0.013
	+ 0.051	+ 0.064	3—3	− 0.087	− 0.023	5—5	+ 0.018	− 0.011	5—7	− 0.002	− 0.007
	− 0.099	− 0.175		− 0.155	− 0.171		+ 0.063	+ 0.013		− 0.048	+ 0.028
4—1	− 0.006	− 0.008		+ 0.242	+ 0.194		− 0.081	− 0.002		+ 0.050	− 0.021
	− 0.002	+ 0.002	4—3	+ 0.014	+ 0.019	6—5	− 0.007	− 0.002	6—7	+ 0.004	− 0.002
	+ 0.008	+ 0.006		+ 0.229	+ 0.068		− 0.042	+ 0.029		+ 0.010	− 0.047
				− 0.243	− 0.087		+ 0.049	− 0.027		− 0.014	+ 0.049
−2—2	+ 0.005	+ 0.001	5—3	− 0.027	− 0.008	7—5	+ 0.005	− 0.003	7—7	− 0.001	+ 0.004
	− 0.005	− 0.003		− 0.012	− 0.003		+ 0.001	0.000		− 0.014	+ 0.008
	0.000	+ 0.002		+ 0.039	+ 0.011		− 0.006	+ 0.003		+ 0.015	− 0.012
−1—2	− 0.046	+ 0.027									
	+ 0.083	− 0.019	0—4	− 0.008	0.000	1—6	− 0.001	0.000			
	− 0.037	− 0.008		+ 0.0145	+ 0.0078		+ 0.0017	+ 0.0014			
				− 0.007	− 0.008		− 0.001	− 0.001			

Saturn.

½ T (0, 0)		−0″00197	0—1	−0″001	0″000	0—2	0″000	+0″008	1—3	−0″001	−0″002
U (1, 0)	+0″03707	+ 0.00197		+ 0.021	− 0.020		+ 0.004	− 0.026		+ 0.003	+ 0.022
T (1, 0)	− 0.002	0.000		− 0.020	+ 0.020		− 0.004	+ 0.018		− 0.004	− 0.020
U (2, 0)	− 0.072	− 0.016	1—1	0.000	+ 0.001	1—2	0.000	+ 0.001	2—3	0.000	− 0.002
V (0, 0)	+ 0.07427	+ 0.01642		− 0.018	+ 0.004		− 0.005	+ 0.072		− 0.011	− 0.019
T (2, 0)	+ 0.008	+ 0.002		+ 0.018	− 0.005		+ 0.005	− 0.073		+ 0.011	+ 0.021
U (3, 0)	+ 0.006	+ 0.001	2—1	+ 0.002	0.000	2—2	0.000	− 0.008			
V (1, 0)	− 0.014	− 0.003		+ 0.020	− 0.009		+ 0.006	− 0.007	1—4	− 0.001	− 0.001
				− 0.022	+ 0.009		− 0.006	+ 0.015		+ 0.002	+ 0.005
−1—1	+ 0.002	− 0.002								− 0.001	− 0.004
	− 0.012	+ 0.008	−1—2	0.000	− 0.002	0—3	0.000	+ 0.002	2—4	0.000	0.000
	+ 0.010	− 0.006		− 0.002	+ 0.004		0.000	− 0.007		− 0.006	− 0.006
				+ 0.002	− 0.002		0.000	+ 0.005		+ 0.006	+ 0.006

Digitized by Google

Mars.			Erde.		
$\frac{1}{2}$ T(0,0)		+0″00009	$\frac{1}{2}$ T(0,0)		+0″00027
U(1,0)	+0″00130	—0.00009	U(1,0)	—0″00415	—0.00027
T(1,0)	—0.0002	+0.0001	T(1,0)	+0.0005	+0.0001
U(2,0)	—0.0095	+0.0006	U(2,0)	—0.0130	+0.0021
V(0,0)	+0.00967	—0.00074	V(0,0)	+0.01254	—0.00224
T(2,0)	+0.001	0.000	T(2,0)	+0.002	0.000
U(3,0)	—0.001	+0.001	U(3,0)	—0.004	+0.001
V(1,0)	0.000	—0.001	V(1,0)	+0.002	—0.001

§ 18.

Die Integration der Gleichung (1) § 17 giebt

$$2W=\Sigma\Sigma\left\{\left[\frac{F(i,i',c)}{i-i'\mu}+\frac{1}{\upsilon}\frac{G(i,i',c)}{i-i'\mu}+\upsilon\frac{H(i,i',c)}{i-i'\mu}\right]-\sqrt{-1}\left[\frac{F(i,i',s)}{i-i'\mu}+\frac{1}{\upsilon}\frac{G(i,i',s)}{i-i'\mu}+\upsilon\frac{H(i,i',s)}{i-i'\mu}\right]\right\}\pi^{i'}y^{i-i'\mu},$$

und ferner folgt aus der Differentiation dieser Gleichung nach υ

$$-2\upsilon\left(\frac{dW}{d\upsilon}\right)=\Sigma\Sigma\left\{\left[\frac{1}{\upsilon}\frac{G(i,i',c)}{i-i'\mu}-\upsilon\frac{H(i,i',c)}{i-i'\mu}\right]-\sqrt{-1}\left[\frac{1}{\upsilon}\frac{G(i,i',s)}{i-i'\mu}-\upsilon\frac{H(i,i',s)}{i-i'\mu}\right]\right\}\pi^{i'}y^{i-i'\mu},$$

Da $\left(\frac{dW}{d\upsilon}\right)dy=\overline{\left(\frac{dW}{d\tau}\right)}dt$ ist, so geben die Formeln (I) § 2

$$(3)\quad 2n\,d\delta z=\Sigma\Sigma\{P(i,i',c)-\sqrt{-1}\,P(i,i',s)\}\pi^{i'}y^{i-i'\mu}n\,dt\ ,\quad 2d\nu=\tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma\{Q(i,i',c)-\sqrt{-1}\,Q(i,i',s)\}\pi^{i'}y^{i-i'\mu}\frac{dy}{y}\qquad(4)$$

wenn $P(i,i',{}^{c}_{s})=\frac{F(i,i',{}^{c}_{s})}{i-i'\mu}+\frac{G(i+1,i',{}^{c}_{s})}{i+1-i'\mu}+\frac{H(i-1,i',{}^{c}_{s})}{i-1-i'\mu}$, und $Q(i,i',{}^{c}_{s})=\frac{G(i+1,i',{}^{c}_{s})}{i+1-i'\mu}-\frac{H(i-1,i',{}^{c}_{s})}{i-1-i'\mu}$ ist.

Was die Breitenstörung anlangt, so erhält man durch die Integration der Gleichung (2) § 17 und die Differentiation nach υ mit Rücksicht auf (II) § 3

$$(5)\quad \frac{2du}{\cos i}=\Sigma\Sigma\{W(i,i',c)-\sqrt{-1}\,W(i,i',s)\}\pi^{i'}y^{i-i'\mu}\frac{dy}{y},\ \text{wo}\ W(i,i',{}^{c}_{s})=-\frac{U(i+1,i',{}^{c}_{s})}{i+1-i'\mu}+\frac{V(i-1,i',{}^{c}_{s})}{i-1-i'\mu}$$

Jupiter.

Um die Integrationen auszuführen, waren zuerst die Divisoren zu berechnen, die sich mit $\log\mu=\log\frac{n'}{n}=9.4587630$ ergaben. Von den Divisoren will ich nur diejenigen, die kleiner als 1 sind, ansetzen

$0-1\mu=-0.2875828$	$0-3\mu=-0.862748$	$1-5\mu=-0.43791$	$2-7\mu=-0.013079$
$1-1\mu=+0.7124172$	$1-3\mu=+0.1372516$	$2-5\mu=+0.56209$	$3-7\mu=+0.98692$
$0-2\mu=-0.575166$	$1-4\mu=-0.150331$	$1-6\mu=-0.72550$	$2-8\mu=-0.3007$
$1-2\mu=+0.424834$	$2-4\mu=+0.849669$	$2-6\mu=+0.27450$	$3-8\mu=+0.6993$

P(0,0)	—20″3473		—3—1	+0″001	—0″001	1—1	—28″192	—64″399	—2—2	+ 0″005	+ 0″001
P(1,0)	+ 2.941	— 0″574		+ 0.003	— 0.002		+ 21.329	+ 48.770		+ 0.008	+ 0.001
Q(1,0)	+ 0.861	— 0.109	—2—1	— 0.003	+ 0.038	2—1	— 0.224	— 3.198	—1—2	— 0.199	+ 0.151
P(2,0)	— 0.328	— 0.117		+ 0.003	+ 0.060		+ 0.489	+ 4.660		— 0.229	+ 0.182
Q(2,0)	+ 0.438	+ 0.198	—1—1	— 1.331	— 0.570	3—1	— 0.045	— 0.107	0—2	— 2.789	+ 3.939
P(3,0)	+ 0.017	— 0.005		— 1.634	— 0.541		+ 0.065	+ 0.180		— 2.520	+ 3.167
Q(3,0)	— 0.030	+ 0.008	0—1	— 3.310	+ 0.727	4—1	+ 0.004	+ 0.006	1—2	—48.336	+48.692
P(4,0)	0.000	+ 0.001		— 1.381	— 0.722		— 0.008	— 0.011		+26.465	—27.363
Q(4,0)	0.000	— 0.001									

Digitized by Google

2—2	— 92.608	+ 113.274	1—4	— 1.8491	— 1.0765	7—5	— 0.006	+ 0.004	5—7	— 0.261	— 0.117
	+115.129	—140.834		— 0.4803	— 0.2239		+ 0.012	— 0.008		+ 0.398	+ 0.223
3—2	+ 1.258	— 0.575	2—4	—19.904	+ 0.388				6—7	+ 0.313	— 0.185
	— 1.895	+ 0.822		+18.027	— 0.687	1—6	+ 0.013	+ 0.012		— 0.562	+ 0.296
4—2	+ 0.042	— 0.058	3—4	— 6.027	+ 6.833		+ 0.011	+ 0.012	7—7	— 0.007	+ 0.233
	— 0.076	+ 0.098		+ 8.664	— 9.111	2—6	+ 0.142	+ 0.170		+ 0.009	— 0.435
5—2	— 0.002	+ 0.002	4—4	— 1.175	— 5.885		— 0.064	— 0.059	8—7	+ 0.011	+ 0.005
	+ 0.003	— 0.004		+ 1.981	+ 9.757	3—6	+ 1.084	+ 0.131		— 0.021	— 0.010
			5—4	— 0.114	+ 0.079		— 1.226	— 0.193			
—1—3	— 0.005	+ 0.027		+ 0.206	— 0.120	4—6	— 0.553	+ 0.518	2—8		+ 0.002
	— 0.004	+ 0.032	6—4	+ 0.004	+ 0.016		+ 0.867	— 0.691			+ 0.001
0—3	+ 0.370	+ 1.898		— 0.006	— 0.030	5—6	— 0.097	— 0.928	3—8	+ 0.013	+ 0.029
	+ 0.309	+ 1.869					+ 0.086	+ 1.556		— 0.012	— 0.023
1—3	+ 0.2419	+ 24.3885	0—5	— 0.006	+ 0.004	6—6	+ 0.577	+ 0.300	4—8	+ 0.047	+ 0.012
	— 0.3610	— 4.9390		— 0.005	+ 0.005		— 1.053	— 0.539		— 0.058	— 0.021
2—3	+ 49.326	+ 98.380	1—5	— 0.058	+ 0.078	7—6	+ 0.016	— 0.020	5—8	— 0.058	+ 0.042
	— 52.277	—106.716		— 0.042	+ 0.055		— 0.032	+ 0.037		+ 0.095	— 0.053
3—3	— 21.929	— 5.500	2—5	— 0.580	+ 1.249	8—6	— 0.003	— 0.002	6—8	+ 0.001	— 0.121
	+ 33.016	+ 8.225		+ 0.339	— 0.889		+ 0.005	+ 0.004		— 0.021	+ 0.202
4—3	+ 0.203	+ 0.340	3—5	+ 1.047	+ 2.702				7—8	+ 0.121	+ 0.084
	— 0.295	— 0.562		— 1.151	— 3.467	1—7	— 0.0194	+ 0.0205		— 0.211	— 0.161
5—3	+ 0.035	+ 0.006	4—5	— 2.479	— 0.808		— 0.019	+ 0.021	8—8	— 0.079	+ 0.035
	— 0.062	— 0.014		+ 3.799	+ 1.440	2—7	— 0.42622	+ 0.15459		+ 0.148	— 0.069
			5—5	+ 1.518	— 1.136		— 0.00869	+ 0.00441	9—8	— 0.000	+ 0.005
—1—4	+ 0.002	+ 0.002		— 2.654	+ 2.006	3—7	— 2.3640	+ 3.2886		+ 0.001	— 0.011
	+ 0.002	+ 0.002	6—5	— 0.038	— 0.044		+ 2.339	— 3.271			
0—4	— 0.177	— 0.076		+ 0.062	+ 0.084	4—7	+ 0.047	+ 0.186			
	— 0.184	— 0.068					— 0.040	— 0.260			

W(—2—1)	+0″.024	—0″.038	—1—3	+0″.009	—0″.018	0—5	+0″.004	—0″.003	6—6	—0″.005	—0″.018
W(—1—1)	— 0.012	+ 1.438	0—3	— 0.048	— 0.840	1—5	+ 0.002	— 0.020	7—6	+ 0.008	+ 0.005
W(0—1)	+ 0.322	+ 0.753	1—3	+ 0.0568	— 0.0855	2—5	— 0.011	— 0.081			
W(1—1)	+ 0.385	+ 1.947	2—3	— 7.517	— 2.355	3—5	— 0.352	— 0.143	1—7	+ 0.022	— 0.009
2—1	+ 0.732	+ 1.738	3—3	+ 0.263	+ 0.226	4—5	+ 0.190	— 0.108	2—7	— 0.00010	— 0.00086
3—1	— 0.071	— 0.120	4—3	— 0.169	— 0.057	5—5	— 0.045	— 0.003	3—7	— 0.055	— 0.531
4—1	+ 0.002	+ 0.002	5—3	+ 0.015	+ 0.004	6—5	+ 0.021	— 0.012	4—7	— 0.031	— 0.017
									5—7	+ 0.037	— 0.018
—1—2	+ 0.160	— 0.029	0—4	+ 0.100	+ 0.055	1—6	— 0.006	— 0.004	6—7	— 0.007	+ 0.026
0—2	+ 1.000	— 0.791	1—4	+ 0.0467	— 0.0271	2—6	— 0.002	— 0.003	7—7	+ 0.006	— 0.005
1—2	+ 1.295	— 1.547	2—4	+ 1.243	— 1.156	3—6	— 0.126	+ 0.098			
2—2	+ 1.293	— 0.829	3—4	— 0.081	— 0.761	4—6	— 0.003	— 0.109			
3—2	— 0.358	+ 0.384	4—4	— 0.046	+ 0.109	5—6	+ 0.059	+ 0.045			
4—2	+ 0.027	— 0.036	5—4	— 0.007	— 0.065						

Saturn.

$\log\mu = 9.063729$ lässt finden

$0-1\mu = -0.1158$	$0-2\mu = -0.2316$	$0-3\mu = -0.3474$	$0-4\mu = -0.463$	$0-5\mu = -0.578$
$1-1\mu = +0.8842$	$1-2\mu = +0.7684$	$1-3\mu = +0.6526$	$1-4\mu = +0.537$	$1-5\mu = +0.421$

Digitized by Google

P(0,0)	—0″8433		3—1	+0″003	—0″001	0—3	+0″002	—0″048	3—4	+0″084	+0″124
P(1,0)	+ 0.137	—0″011		— 0.004	+ 0.001		+ 0.003	— 0.030		— 0.127	— 0.194
Q(1,0)	+ 0.031	— 0.001				1—3	+ 0.135	— 0.824	4—4	— 0.048	— 0.029
P(2,0)	— 0.008	— 0.008	—1—2	— 0.003	— 0.022		— 0.099	+ 0.640		+ 0.082	+ 0.049
Q(2,0)	+ 0.009	+ 0.013		— 0.005	— 0.023	2—3	+ 0.051	— 1.103	5—4	+ 0.002	0.000
			0—2	+ 0.044	— 0.237		— 0.079	+ 1.448		— 0.003	0.000
—2—1	— 0.001	+ 0.001		+ 0.026	— 0.105	3—3	+ 0.123	+ 0.321			
	— 0.001	+ 0.002	1—2	+ 1.361	— 4.184		— 0.199	— 0.515	1—5	— 0.004	— 0.021
—1—1	— 0.118	— 0.046		— 1.156	+ 3.589	4—3	+ 0.001	— 0.004		+ 0.003	+ 0.012
	— 0.134	— 0.048	2—2	+ 0.831	— 2.998		— 0.002	+ 0.005	2—5	— 0.027	— 0.063
0—1	— 0.0667	— 0.0588		— 1.147	+ 4.140					+ 0.031	+ 0.076
	+ 0.0099	— 0.0197	3—2	— 0.017	+ 0.027	0—4	— 0.001	— 0.008	3—5	+ 0.031	+ 0.029
1—1	+ 2.839	— 1.940		+ 0.026	— 0.037		0.000	— 0.006		— 0.045	— 0.045
	— 2.567	+ 1.752				1—4	0.000	— 0.134	4—5	— 0.028	— 0.010
2—1	+ 0.013	+ 0.040	—1—3	0.000	— 0.003		+ 0.002	+ 0.092		+ 0.046	+ 0.017
	— 0.024	— 0.051		— 0.001	— 0.004	2—4	— 0.052	— 0.285	5—5	+ 0.010	— 0.001
							+ 0.060	+ 0.357		— 0.018	+ 0.002

W (—2—1)	+0″002	—0″001	—1—2	—0″008	+0″017	—1—3	0″000	+0″003	0—4	0″000	+0″002
W (—1—1)	— 0.107	+ 0.068	0—2	— 0.002	+ 0.020	0—3	+ 0.001	+ 0.007	1—4	+ 0.002	+ 0.006
W (0—1)	— 0.005	+ 0.005	1—2	— 0.018	+ 0.276	1—3	+ 0.007	+ 0.046	2—4	+ 0.014	+ 0.014
1—1	— 0.140	+ 0.045	2—2	— 0.010	+ 0.022	2—3	+ 0.022	+ 0.039	3—4	— 0.006	— 0.003
2—1	— 0.031	+ 0.013	3—2	+ 0.003	— 0.005	3—3		— 0.004			
3—1	+ 0.002	— 0.001									

Mars.

Aus $\log\mu = 0.258566$ folgen $1-1\mu = -0.8137$ | $3-2\mu = -0.6274$ | $5-3\mu = -0.441$
$2-1\mu = +0.1863$ | $4-2\mu = +0.3726$ | $6-3\mu = +0.569$

P (0,0)	+0″2424		1—1	+0″489	+0″261	2—2	—0″156	—0″211	3—3	—0″012	—0″068
P (1,0)	— 0.001	+0″002		+ 0.306	+ 0.168		— 0.220	— 0.294		— 0.021	— 0.114
Q (1,0)	0.000	— 0.012	2—1	+ 0.0866	+ 0.1678	3—2	+ 0.291	+ 0.130	4—3	— 0.090	— 0.120
P (2,0)	+ 0.002	+ 0.001		— 0.0208	— 0.0434		+ 0.197	+ 0.083		— 0.115	— 0.161
Q (2,0)	— 0.005	— 0.001	3—1	— 0.008	— 0.016	4—2	— 0.014	+ 0.011	5—3	+ 0.069	+ 0.013
				+ 0.008	+ 0.017		+ 0.005	— 0.008		+ 0.033	+ 0.004
0—1	— 0.011	— 0.012							6—3	— 0.004	+ 0.003
	+ 0.020	— 0.002	1—2	+ 0.016	+ 0.013	2—3	+ 0.001	+ 0.007		+ 0.003	— 0.002
				+ 0.007	+ 0.013		+ 0.002	+ 0.015			

Erde.

$\log\mu = 0.53291$ giebt folgende Divisoren kleiner als 1

$3-1\mu = -0.4112$ | $6-2\mu = -0.822$ | $10-3\mu = -0.234$
$4-1\mu = +0.5888$ | $7-2\mu = +0.177$ | $11-3\mu = +0.766$

P (0,0)	+1″3868		2—1	+0″069	—0″063	3—2	—0″040	+0″057	3—3	+0″001	—0″010
P (1,0)	— 0.073	+0″002		+ 0.385	— 0.234		— 0.084	+ 0.125		+ 0.003	— 0.021
Q (1,0)	+ 0.113	— 0.008	3—1	— 0.115	+ 0.092	4—2	— 0.028	+ 0.044	4—3	+ 0.002	— 0.019
P (2,0)	— 0.004	0.000		— 0.042	+ 0.036		— 0.057	+ 0.087		+ 0.005	— 0.045
Q (2,0)	+ 0.007	— 0.001	4—1	+ 0.007	— 0.009	5—2	— 0.024	+ 0.039	5—3	+ 0.001	— 0.016
				— 0.007	+ 0.008		— 0.036	+ 0.060		+ 0.004	— 0.038
—1—1	— 0.038	+ 0.019				6—2	+ 0.040	— 0.080	6—3	0.000	— 0.010
	+ 0.012	— 0.009	0—2	+ 0.004	— 0.001		+ 0.035	— 0.069		+ 0.002	— 0.021
0—1	+ 0.213	— 0.109		— 0.011	+ 0.009	7—2	— 0.0053	+ 0.0075	7—3	0.000	— 0.004
	— 0.221	+ 0.115	1—2	+ 0.002	— 0.010		+ 0.0013	— 0.0013		0.000	— 0.009
1—1	— 0.459	+ 0.234		+ 0.043	— 0.042						
	+ 1.155	— 0.601	2—2	— 0.035	+ 0.046	2—3	— 0.001	+ 0.008			
				— 0.062	+ 0.092		— 0.002	+ 0.018			

Digitized by Google

§ 19.

Um die zweite Integration vornehmen zu können, muss aus (3) § 18 dt durch dy eliminirt werden. Es ist $n\,dt = \frac{dy}{y\sqrt{-1}}\left(1 - y\frac{e}{2} - \frac{1}{y}\frac{e}{2}\right)$

Integrirt man die Gleichungen und geht vermittelst der Bedingungen

$P(-i,-i',c) = P(i,i',c)$, $P(-i,-i',s) = -P(i,i',s)$, $Q(-i,-i',c) = Q(i,i',c)$, $Q(-i,-i',s) = -Q(i,i',s)$, $W(-i,-i',c) = -W(i,i',c)$, $W(-i,-i',s) = W(i,i',s)$, die aus der Beschaffenheit der F, G, H, U und V-Coefficienten sich ergeben, zum Reellen über, so werden die Endwerthe der Störungen ohne Rücksicht auf die Integrationsconstanten

$$(6) \qquad n\delta z = -\Sigma\Sigma R(i,i',s)\cos[(i-i'\mu)\epsilon - i'(c'-c\mu)] + \Sigma\Sigma R(i,i',c)\sin[(i-i'\mu)\epsilon - i'(c'-c\mu)]$$

$$(7) \qquad 2\nu = \Sigma\Sigma S(i,i',c)\cos[(i-i'\mu)\epsilon - i'(c'-c\mu)] + \Sigma\Sigma S(i,i',s)\sin[(i-i'\mu)\epsilon - i'(c'-c\mu)]$$

$$(8) \qquad \frac{u}{\cos i} = \Sigma\Sigma Y(i,i',c)\cos[(i-i'\mu)\epsilon - i'(c'-c\mu)] + \Sigma\Sigma Y(i,i',s)\sin[(i-i'\mu)\epsilon - i'(c'-c\mu)]$$

wo

$$R(i,i',{}^{c}_{s}) = \frac{P(i,i',{}^{c}_{s}) - \frac{e}{2}P(i+1,i',{}^{c}_{s}) - \frac{e}{2}P(i-1,i',{}^{c}_{s})}{i-i'\mu}, \quad S(i,i',{}^{c}_{s}) = \frac{Q(i,i',{}^{c}_{s})}{i-i'\mu}, \quad Y(i,i',{}^{c}_{s}) = \frac{W(i,i',{}^{c}_{s})}{i-i'\mu}$$

Nach der Integration tritt in den Gliedern mit $i'=0$ ausserhalb des Sinus- und Cosinuszeichens ϵ auf, welches durch die Gleichung $\epsilon = nt + e\sin\epsilon$ eliminirt wird. Aus den Zahlenwerthen des vorigen Paragraphen gehen die folgenden Störungen der mittleren Länge, des Radius vector und der auf der Bahn senkrechten Coordinate hervor, wenn keine Rücksicht auf die willkürlichen Integrationsconstanten, und die sich mit denselben vereinigende mittlere Anomalie c genommen wird.

Jupiter.

	$n\delta z$		ν		$\frac{u}{\cos i}$	
ϵ, $\mu\epsilon$	cos	sin	cos	sin	cos	sin
0 0					+0″904	
0 0	− 20″52347nt		− 0″05088nt		− 0.00474nt	
1 0	+ 1.41	+ 6″60	− 1.40	+ 0″36	− 1.04	− 0″02
1 0	− 3.66255nt	+ 0.84350nt	− 0.42479nt	− 1.83127nt	+ 0.03957nt	− 2.01498nt
2 0	− 0.02	− 0.53	+ 0.22	+ 0.02	− 0.11	+ 0.04
2 0	+ 0.10967nt	− 0.02544nt				
3 0		+ 0.02				
−2 −1	+ 0.03	− 0.03		− 0.01	− 0.01	+ 0.02
−1 −1	− 0.48	+ 0.88	+ 0.63	+ 0.21	+ 0.01	− 1.12
0 −1	+ 16.06	+ 5.36	+ 2.40	+ 1.26	− 1.12	− 2.62
1 −1	+ 90.19	− 39.28	+ 14.97	+ 34.23	+ 0.54	+ 2.73
2 −1	− 0.39	+ 0.86	+ 0.14	+ 1.36	+ 0.43	+ 1.02
3 −1	− 0.03	− 0.01	+ 0.01	+ 0.03	− 0.03	− 0.04
−1 −2	− 0.05	+ 0.02	+ 0.07	− 0.06	− 0.10	+ 0.02
0 −2	+ 1.76	− 0.20	+ 2.19	− 2.76	− 1.74	+ 1.37
1 −2	− 98.09	− 100.33	+ 31.15	− 32.20	+ 3.05	− 3.64
2 −2	− 77.48	− 63.02	+ 40.40	− 49.42	+ 0.91	− 0.58
3 −2	+ 3.03	+ 2.81	− 0.39	+ 0.17	− 0.15	+ 0.16
4 −2	+ 0.01	− 0.01	− 0.01	+ 0.01	+ 0.01	− 0.01

Digitized by Google

—1—3	— 0.05	+ 0.02		— 0.01	+ 0.01
0—3	+ 0.51	— 0.41	— 0.18	— 1.08	+ 0.06	+ 0.97
1—3	— 133.94	— 19.92	— 1.31	— 17.99	+ 0.41	— 0.62
2—3	— 85.51	+ 44.51	— 22.98	— 46.92	— 6.61	— 2.07
3—8	+ 5.34	— 11.65	+ 7.72	+ 1.92	+ 0.12	+ 0.11
4—3	— 0.21	+ 0.48	— 0.05	— 0.09	— 0.05	— 0.02
5—3			— 0.01			
0—4	— 0.01	+ 0.06	+ 0.08	+ 0.03	— 0.09	— 0.05
1—4	— 7.29	+ 4.30	+ 1.60	+ 0.75	— 0.31	+ 0.18
2—4	— 0.05	— 22.87	+ 10.61	— 0.40	+ 1.46	— 1.36
3—4	— 3.87	— 2.58	+ 2.34	— 2.46	— 0.04	— 0.41
4—4	+ 2.21	— 0.28	+ 0.35	+ 1.71	— 0.02	+ 0.04
5—4	— 0.11	— 0.01	+ 0.03	— 0.02	0.00	— 0.02
1—5	+ 0.01	+ 0.05	+ 0.05	— 0.06	— 0.01	+ 0.05
2—5	— 1.93	— 1.14	+ 0.30	— 0.79	— 0.02	— 0.14
3—5	— 1.71	+ 0.79	— 0.37	— 1.11	— 0.23	— 0.09
4—5	+ 0.35	— 1.03	+ 0.74	+ 0.28	+ 0.07	— 0.04
5—5	+ 0.30	+ 0.47	— 0.37	+ 0.28	— 0.01	
6—5	— 0.01	— 0.03	+ 0.01	+ 0.01		
1—6		— 0.01	— 0.01	— 0.01	+ 0.01	+ 0.01
2—6	— 0.59	+ 0.28	— 0.12	— 0.11	— 0.01	— 0.01
3—6	— 0.07	+ 0.87	— 0.48	— 0.08	— 0.10	+ 0.08
4—6	— 0.25	— 0.27	+ 0.19	— 0.15	0.00	— 0.05
5—6	+ 0.30	— 0.03	+ 0.01	+ 0.24	+ 0.02	+ 0.01
6—6	— 0.08	+ 0.14	— 0.12	— 0.06		
7—6	+ 0.01					
1—7	+ 0.01	— 0.01	+ 0.01	— 0.01	— 0.02	+ 0.01
2—7	— 3.33	+ 21.67	+ 0.33	— 0.17	+ 0.01	+ 0.07
3—7	— 3.31	— 2.37	+ 1.19	— 1.66	— 0.06	— 0.54
4—7	0.00	+ 0.10	— 0.01	— 0.06	— 0.02	— 0.01
5—7	+ 0.04	— 0.10	+ 0.07	+ 0.04	+ 0.01	— 0.01
6—7	+ 0.05	+ 0.08	— 0.07	+ 0.04		+ 0.01
7—7	— 0.05	— 0.01		— 0.04		
3—8	— 0.04	+ 0.02	— 0.01	— 0.02		
4—8	— 0.01	+ 0.03	— 0.02	— 0.01		
5—8	— 0.02	— 0.02	+ 0.02	— 0.01		
6—8	+ 0.03	0.00	0.00	+ 0.03		
7—8	— 0.02	+ 0.03	— 0.02	— 0.02		
8—8	— 0.01	— 0.02	+ 0.01	— 0.01		

Saturn.

		n δ z		ν		$\frac{u}{\cos i}$	
ε	με	cos	sin	cos	sin	cos	sin
0	0					+0″.033	
0	0	—0″.85147nt		—0″.00096nt		— 0.00197nt	
1	0	+ 0.03	+0″.30	— 0.07	+0″.01	— 0.04	—0″.01
1	0	— 0.16863nt	+ 0.01591nt	— 0.00801nt	— 0.08431nt	+ 0.01642nt	— 0.07427nt
2	0	0.00	— 0.02	+ 0.01			
2	0	+ 0.00505nt	— 0.00048nt				

Digitized by Google

—1—1	— 0.04	+ 0.10	+ 0.06	+ 0.02	+ 0.09	— 0.06
0—1	+ 0.52	+ 1.98	— 0.04	— 0.08	+ 0.05	— 0.04
1—1	+ 2.19	+ 3.22	— 1.45	+ 0.99	— 0.16	+ 0.05
2—1	— 0.08	— 0.08	— 0.01	— 0.01	— 0.02	+ 0.01
—1—2	— 0.01			+ 0.01	+ 0.01	— 0.01
0—2	+ 0.06	+ 0.16	— 0.06	+ 0.23	+ 0.01	— 0.08
1—2	+ 5.19	+ 1.70	— 0.75	+ 2.34	— 0.02	+ 0.36
2—2	+ 1.56	+ 0.42	— 0.32	+ 1.17		+ 0.01
3—2	— 0.08	— 0.02	+ 0.01	— 0.01		
0—3		+ 0.02		+ 0.04		— 0.02
1—3	+ 1.16	+ 0.20	— 0.08	+ 0.49	+ 0.01	+ 0.07
2—3	+ 0.65	+ 0.02	— 0.02	+ 0.44	+ 0.01	+ 0.02
3—3	— 0.15	+ 0.05	— 0.04	— 0.10		
4—3	+ 0.01					
1—4	+ 0.22			+ 0.09		+ 0.01
2—4	+ 0.19	— 0.04	+ 0.02	+ 0.12	+ 0.01	+ 0.01
3—4	— 0.06	+ 0.03	— 0.02	— 0.04		
4—4	+ 0.01	— 0.01	+ 0.01	+ 0.01		
1—5	+ 0.04	— 0.01		+ 0.01		
2—5	+ 0.05	— 0.02	+ 0.01	+ 0.03		
3—5	— 0.01	+ 0.01	— 0.01	— 0.01		
4—5		— 0.01	+ 0.01			

Mars.

	$n\delta z$		ν		$\frac{u}{\cos i}$	
$\epsilon, \mu\epsilon$	cos	sin	cos	sin	cos	sin
0 0					+0″0007	
0 0	+0″24244nt		—0″00030nt		+ 0.00009nt	
1 0		+0″01				
1 0	— 0.00825nt	+ 0.00493nt	— 0.00248nt	—0″00412nt	— 0.00074nt	—0″00967nt
2 0	+ 0.00025nt	— 0.00015nt				
0—1	— 0.02	+ 0.02	— 0.01			
1—1	+ 0.31	— 0.60	— 0.19	— 0.10		
2—1	— 0.82	+ 0.31	— 0.06	— 0.12		
3—1	+ 0.02	— 0.01				
1—2	+ 0.01	— 0.01				
2—2	— 0.14	+ 0.11	+ 0.07	+ 0.09		
3—2	+ 0.23	— 0.48	— 0.16	— 0.07		
4—2	— 0.01	— 0.08	+ 0.01	— 0.01		
3—3	— 0.03			+ 0.02		
4—3	— 0.08	+ 0.06	+ 0.04	+ 0.06		
5—3	+ 0.05	— 0.13	— 0.04			
6—3		— 0.01				

Digitized by Google

Erde.

$\epsilon, \mu\epsilon$	$n\delta z$ cos	$n\delta z$ sin	ν cos	ν sin	$\frac{n}{\cos i}$ cos	$\frac{n}{\cos i}$ sin
0 0					−0″0049	
0 0	+1″39115nt		−0″00011nt		+ 0.00027nt	
1 0		−0″04	+ 0.04		− 0.01	
1 0	− 0.03342nt	+ 0.00179nt	− 0.00090nt	−0″01671nt	− 0.00224nt	−0″01254nt
2 0	+ 0.00100nt	− 0.00005nt				
−1 −1	+ 0.01	+ 0.01				
0 −1	− 0.04	− 0.07	+ 0.03	− 0.02		
1 −1	+ 0.10	+ 0.20	− 0.24	+ 0.12		
2 −1	− 0.06	− 0.07	− 0.14	+ 0.08		
3 −1	+ 0.24	+ 0.29	+ 0.05	− 0.04		
4 −1	+ 0.03	+ 0.02	− 0.01	+ 0.01		
2 −2	+ 0.01	+ 0.01	+ 0.01	− 0.01		
3 −2	+ 0.01	+ 0.01	+ 0.01	− 0.02		
4 −2	+ 0.01	+ 0.01	+ 0.01	− 0.02		
5 −2	+ 0.02	+ 0.01	+ 0.01	− 0.02		
6 −2	− 0.10	− 0.05	− 0.02	+ 0.04		
7 −2	− 0.07	− 0.04				

§ 20.

Damit die Störungen in Verbindung mit den zu Grunde gelegten Elementen den Ort und die Geschwindigkeit für die Zeit $t=0$ darstellen, ist noch die Bestimmung von 6 Constanten nothwendig.

Der Ausdruck von dW (§ 17) zeigt, dass die Constante von der Form

$$c+(a+b\sqrt{-1})\upsilon+(a_1+\sqrt{-1}\,b_1)\frac{1}{\upsilon}$$

ist, und dass ferner, da W reell ist, $a_1=a$, $b_1=-b$ sein muss. Man kann also auch die Constante in W schreiben $k+k_1\cos\eta+k_2\sin\eta$. Hiermit wird das in $\frac{dz}{dt}$ hervorgebrachte Glied $k+k_1\cos\epsilon+k_2\sin\epsilon$. Integrirt man diesen Ausdruck und bezeichnet die dieser Integration hinzuzufügende Constante mit c, so wird

$$\Delta(nz)=c+(1+k-\tfrac{1}{2}ek_1)nt+(1-\tfrac{1}{2}e^2)k_1\sin\epsilon-k_2\cos\epsilon-\tfrac{1}{4}ek_1\sin 2\epsilon+\tfrac{1}{4}ek_2\cos 2\epsilon$$

Ferner wird die Form des constanten Gliedes in 2ν

$$\Delta(2\nu)=2C-k_1\cos\epsilon-k_2\sin\epsilon$$

und zwar lässt sich C durch die anderen Constanten ausdrücken. Es wurde (6) § 2 gefunden $\frac{dz}{dt}(1+\nu)^2=\frac{h_0}{h}$ oder bis auf Glieder zweiter Ordnung $2\nu=\frac{h_0}{h}-\frac{dz}{dt}$

Die in $\frac{h_0}{h}$ erzeugte Constante ist zunächst zu bestimmen. Vergleicht man den Ausdruck (5) § 2 von W mit den eingeführten Constanten, nachdem die excentrische Anomalie durch die wahre ersetzt ist, so erkennt man, dass die in $\left(\frac{2h}{h_0}-\frac{h_0}{h}-1\right)$ hervorgebrachte Constante $=k+ek_1$ ist. Bei Vernachlässigung der Glieder zweiter Ordnung wird die Constante in $\frac{h_0}{h}=1-\frac{1}{3}(k+ek_1)$

Digitized by Google

Da ferner das constante Glied in $\frac{dz}{dt}=1+k+P(0,c)-\frac{e}{2}H(0,c)$ ist, so wird

$$C=-\frac{1}{6}\left(4k+ek_1+3P(0,c)-3\frac{e}{2}H(0,c)\right)$$

Die Constanten der Breitenstörungen folgen aus der Form von dR (§ 17). Der obigen Bestimmung analog muss dem Integral von dR eine Constante von der Form $l_2+l\sin\eta+l_1\cos\eta$ hinzugefügt werden. Die Gleichung (II) § 3 zeigt aber, dass diese Constante auch unter die Form $\lambda\sin\omega+\lambda_1\cos\omega$ muss gebracht werden können. Ersetzt man die wahre Anomalie durch die excentrische, so zeigt die Vergleichung beider Formen, dass $l_2=-el_1$ sein muss. Da nun nach (II) § 3 $u=\overline{R}$ ist, so ist das constante Glied von $\frac{u}{\cos i}$

$$\Delta\left(\frac{u}{\cos i}\right)=-el_1+l\sin\epsilon+l_1\cos\epsilon$$

Die numerischen Werthe der 6 Constanten c, k, k_1, k_2, l, l_1 sind noch zu ermitteln. Weil bei osculirenden Elementen die Störungen der Coordinaten und der Differentialquotienten derselben nach der Zeit für die Epoche gleich Null werden müssen, so erhält man 6 Bedingungsgleichungen, aus welchen die 6 Constanten bestimmt werden können.

Es muss also (nz), (v), $\left(\frac{u}{\cos i}\right)$, $\left(\frac{d\delta z}{dt}\right)$, $\left(\frac{dv}{d\epsilon}\right)$, $\left(\frac{du}{\cos i\, d\epsilon}\right)$ aus den in § 18 und § 19 mitgetheilten Werthen für die Zeit $t=0$ berechnet werden. Für die Constanten erhält man dann folgende Ausdrücke

$$k=-\left(\frac{d\delta z}{dt}\right)+2\left(\frac{dv}{d\epsilon}\right)\frac{e\sin\epsilon}{1-e\cos\epsilon}+\left\{4\left(\frac{d\delta z}{dt}\right)+6(v)-3Z_0\right\}\frac{1}{1-e\cos\epsilon}$$

$$k_1=-2\left(\frac{dv}{d\epsilon}\right)\frac{\sin\epsilon}{1-e\cos\epsilon}-\left\{4\left(\frac{d\delta z}{dt}\right)+6(v)-3Z_0\right\}\frac{\cos\epsilon}{1-e\cos\epsilon}$$

$$k_2=2\left(\frac{dv}{d\epsilon}\right)\frac{\cos\epsilon-e}{1-e\cos\epsilon}-\left\{4\left(\frac{d\delta z}{dt}\right)+6(v)-3Z_0\right\}\frac{\sin\epsilon}{1-e\cos\epsilon}$$

$$l=-\left(\frac{u}{\cos i}\right)\frac{\sin\epsilon}{1-e\cos\epsilon}-\left(\frac{du}{\cos i\, d\epsilon}\right)\frac{\cos\epsilon-e}{1-e\cos\epsilon}$$

$$l_1=-\left(\frac{u}{\cos i}\right)\frac{\cos\epsilon}{1-e\cos\epsilon}+\left(\frac{du}{\cos i\, d\epsilon}\right)\frac{\sin\epsilon}{1-e\cos\epsilon}$$

$$Z_0=P(0,c)-\frac{e}{2}H(0,c)$$

$$c=c_0-(n\delta z)-k_1\left(\frac{2-e^2}{2}\sin\epsilon-\frac{1}{2}e\sin\epsilon\cos\epsilon\right)+k_2\left(\frac{1}{4}e+\cos\epsilon-\frac{1}{2}e\cos^2\epsilon\right)$$

Für die Epoche 1861 Juni 17 0^h Berlin fand ich mit Hülfe der bei den Elementensystemen aufgeführten mittleren Anomalien folgende Werthe:

	$(n\delta z)$	$2(v)$	$\left(\frac{d\delta z}{dt}\right)$	$2\left(\frac{dv}{d\epsilon}\right)$	$\left(\frac{u}{\cos i}\right)$	$\left(\frac{du}{\cos i\, d\epsilon}\right)$
$i'=0$	− 7″.01	+ 0″.52	− 18″.45	+ 1″.04	+ 1″.17	+ 0″.98
♃	+ 66.80	+ 201.13	− 197.11	+ 169.73	+ 16.22	+ 5.68
♄	− 4.83	+ 7.91	− 7.65	+ 1.28	+ 0.66	− 0.07
♂	− 1.60	+ 0.03	− 0.07	− 0.89		
♁	− 0.02	+ 0.28	+ 0.22	− 1.32		
Summe	+ 53″.34	+ 209″.87	− 223″.06	+ 169″.84	+ 18″.05	+ 6″.59

In der ersten Zeile befinden sich die Summen der in der Abtheilung $i'=0$ auftretenden Glieder, für welche bei allen störenden Planeten die Argumente gleich sind. Die folgenden Zeilen enthalten die übrigen Jupiter-, Saturn-, Mars- und Erdstörungen.

Digitized by Google

Durch die Anwendung der obigen Ausdrücke fand ich

$$c = 272^0\,15'\,31''.18,\quad k = +0''.29,\quad k_1 = +151''.38,\quad k_2 = -235''.71,\quad l = +19''.13,\quad l_1 = -5''.07.$$

Der Coefficient von t in n z ist mit Berücksichtigung der Constanten $= \left(1 + R(0,c) + k - \frac{e}{2} k_1\right) n$, welcher als der mittlere Werth der mittleren Bewegung definirt wird. Nach dieser Definition wird der mittlere Werth von $n = 1040''.14680 - 0''.1438 = 1040.0030$, mit welchem die Integration eigentlich hätte ausgeführt werden müssen.

Die Aenderung von n sowie die von c um $+1'\,49''.18$ gaben folgende Correctionen der Jupitersstörungen.

	Δ(nδz)		Δ(v)	
ε, με	cos	sin	cos	sin
1—2	—0''.02	—0''.02		
2—2	— 0.02	— 0.02	+0''.01	—0''.01
1—3	— 0.21	— 0.03		
2—3	— 0.09	+ 0.05	— 0.02	— 0.05
1—4	+ 0.01	— 0.01		
2—4		+ 0.02	— 0.01	
2—7	+ 0.14	— 0.91		
3—7	+ 0.07	+ 0.05	— 0.02	+ 0.03

Der Einfluss dieser Grössen auf die Constanten wird

$$\Delta c = -0''.84,\quad \Delta k = +0''.01,\quad \Delta k_1 = -0''.14,\quad \Delta k_2 = -0''.09.$$

Die abhängige Constante des Radius vector ist $C = +6''.45$.

Vereinigt man nun die Constanten mit den übrigen Störungsgliedern der Abtheilung $i' = 0$, so werden die von der mittleren Anomalie der störenden Planeten unabhängigen Glieder:

		nz		v		u/cos i	
ε	με	cos	sin	cos	sin	cos	sin
0	0	272° 15' 30''.34		+ 6''.45		+1''.540	
0	0	+ 1040.0030t		— 0.0522nt		—0.00635nt	
1	0	+ 237.24	+157''.03	—77.06	+117''.53	— 6.16	+19''.10
1	0	— 3.8729nt	+ 0.8663nt	— 0.4363nt	— 1.9365nt	+ 0.0530nt	— 2.1115nt
2	0	— 7.08	— 5.08	+ 0.23	+ 0.03	—0.12	+ 0.04
2	0	+ 0.1160nt	— 0.0261nt				
3	0		+ 0.02	— 0.01			
		etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.

An Stelle der etc. sind die Werthe des § 19 vom Argumente $i' = -1$ an zu setzen.

Digitized by Google

Digitized by Google